تقنيات التعديل بالمربعات الصغرى

بالرغم من أن هنالك العديد من التقنيات المستخدمة سندرس طريقتين فقط لأنهما الأكثر شيوعاً. ومن المهم الإشارة هنا أنه مهما كانت الطريقة المتبعة في التعديل لحل مسألة أو شبكة مساحية، فإن النتائج النهائية لتعديل المربعات الصغرى يجب أن تكون متطابقة. و لهذا فإن اختيار إحدى هاتين الطريقتين التي سيجري النقاش حولهما يعتمد بصورة أساسية على نمط المسألة أو النموذج الرياضي لها و على المعلومات المطلوبة و طريقة الحساب. سوف تناقش هذه النقطة فيما بعد، عند عرض مراحل الحساب لكل تقنية على حدة.

طريقة تعديل القياسات غير المباشرة(Indirect Observations)

تتميز هذه التقنية بالخصائص التالية:

1. تشمل الشروط كلا المعادلات الشرطية والمعادلات الوسيطية أي كلا القياسات والوسطاء.

2. هنالك يكون عدد الشروط c يساوي عدد القياسات n، أي أن عدد المعادلات يساوي إلى n

3. كل معادلة تحتوي على قياس (رصد) واحد فقط.

بأخذ هذه الخصائص بعين الإعتبار ، تأخذ المعادلات الشرطية الصيغة العامة التالية:

$$\begin{aligned}
v_1 + b_{11}\cdot\delta_1 + b_{12}\cdot\delta_2 + \cdots + b_{1u}\cdot\delta_u &= f_1 \\
v_2 + b_{21}\cdot\delta_1 + b_{22}\cdot\delta_2 + \cdots + b_{2u}\cdot\delta_u &= f_2 \\
v_3 + b_{31}\cdot\delta_1 + b_{32}\cdot\delta_2 + \cdots + b_{3u}\cdot\delta_u &= f_3 \\
\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\
v_n + b_{n1}\cdot\delta_1 + b_{n2}\cdot\delta_2 + \cdots + b_{nu}\cdot\delta_u &= f_n
\end{aligned} \tag{1.8}$$

حيث أن طول شعاع الرواسب $v=[v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \cdots \quad v_n]$ يماثل طول شعاع القياسات أو عدد القياسات n والشعاع $f=[f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad \cdots \quad f_n]$ أيضاً طوله يساوي إلى n. أما شعاع الوسطاء (parameters) كمتحولات مجهولة $\Delta=[\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \cdots \quad \delta_u]$ فطوله يساوي إلى u . أخيراً تشكل المعاملات b_{ij} مصفوفة عدد أسطرها n و عدد أعمدتها u .و هكذا نستطيع كتابة مجموعة المعادلات الأخيرة بالصيغة المصفوفية التالية:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1u} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2u} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \vdots \\ \delta_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

أو أكثر تحديداً :

$$v + B \cdot \Delta = f \tag{1.10}$$

في المسائل الخطية ، تكون قيم عناصر الشعاع f تساوي قيم شعاع الأرصاد l مطروح منها شعاع d قيم عناصره ثابتة (constants). ونكتب:

$$f = d - l \tag{1.11}$$

<u>مثال(2):</u> لتوضيح المعادلات (1.8) حتى (1.10) نعود إلى شبكة التسوية الموضحة في المثال الأول ونضع المتحولات المجهولة $[h_a \quad h_b \quad h_c] = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3]$ ونكتب الشروط من جديد آخذين بعين الإعتبار أن:

$$\begin{aligned} v_1 + l_1 &= \delta_1 - h_{Bm} \\ v_2 + l_2 &= \delta_2 - \delta_1 \\ v_3 + l_3 &= \delta_2 - h_{Bm} \\ v_4 + l_4 &= \delta_3 - \delta_2 \\ v_5 + l_5 &= \delta_3 - h_{Bm} \end{aligned} \tag{1.12}$$

نعيد ترتيب المعادلات الأخيرة بالشكل:

$$\begin{array}{lllllll} v_1 & -\delta_1 & & = & -h_{Bm} & -l_1 & = f_1 \\ v_2 & +\delta_1 & -\delta_2 & = & & -l_2 & = f_2 \\ v_3 & -\delta_2 & & = & -h_{Bm} & -l_3 & = f_3 \\ v_4 & +\delta_2 & -\delta_3 & = & & -l_4 & = f_4 \\ v_5 & -\delta_3 & & = & -h_{Bm} & -l_5 & = f_5 \end{array} \tag{1.13}$$

و يمكن أن تكتب بالصيغة المصفوفية ، حيث أن الطرف اليساري يساوي إلى:

$$v + B \cdot \Delta = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

و الطرف اليميني يساوي إلى:

$$f = d - l = \begin{bmatrix} -h_{Bm} \\ 0 \\ -h_{Bm} \\ 0 \\ -h_{Bm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

و أخيراً المعادلات الشرطية الوسيطية (الشروط) تأخذ الصيغة المعروفة:

$$v + B \cdot \Delta = f \quad (1.16)$$

طريقة تعديل القياسات فقط(adjustment of observations only)

كما يدل العنوان أعلاه فإن هذا النوع من التعديل لا يشمل في مرحلته الأولى سوى القياسات أو الأرصاد فقط ، أما الوسطاء (parameters) فهي غير واردة في المعادلات الشرطية أي لا تدخل ضمن الشروط. عدد هذه الشروط يساوي العدد الفائض $r = n = n_o$ وهي تأخذ الصيغة العامة التالية:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 + \cdots + a_{1n} \cdot v_n &= f_1 \\ a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \cdots + a_{2n} \cdot v_n &= f_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{r1} \cdot v_1 + a_{r2} \cdot v_2 + \cdots + a_{rn} \cdot v_n &= f_r \end{aligned} \quad (1.17)$$

أو بالصيغة المصفوفية

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

و اختصاراً:

$$A \cdot v = f \tag{1.19}$$

من أجل المسائل الخطية في التعديل ، يعطى شعاع القيم الثابتة (الطرف اليميني في المعادلات أعلاه) كما يلي:

$$f = d - A \cdot l \tag{1.20}$$

<u>مثال (3):</u> كتطبيق على العلاقات الأخيرة نعود إلى نفس المثال السابق حيث أن لدينا العدد الفائض يساوي $r = n - n_o = 2$،إذن نستطيع كتابة معادلتين شرطيتين فقط هما:

$$\begin{aligned} (v_1 + l_1) + (v_2 + l_2) - (v_3 + l_3) &= f_1 \\ (v_3 + l_3) + (v_4 + l_4) - (v_5 + l_5) &= f_2 \end{aligned} \tag{1.21}$$

أو بالشكل:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 - v_3 &= -l_1 - l_2 + l_3 = f_1 \\ v_3 + v_4 - v_5 &= -l_3 - l_4 + l_5 = f_2 \end{aligned} \tag{1.22}$$

نعود إلى الصيغة المصفوفية المختصرة: $A \cdot v = f$ فنجد أن الطرف اليساري للمعادلات الشرطية:

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

أما الطرف اليميني:

$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{bmatrix} = d - A \cdot l \qquad (1.24)$$

متى تمت صياغة المعادلات الشرطية ، عندها نستطيع تطبيق الحل الأمثل للمعادلات بالمربعات الصغرى من خلال تطبيق القاعدة (1.4) :

$$\phi = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 \rightarrow \min$$

السبب في كوننا نحتاج إلى هذه القاعدة الإضافية لأن مجموعة المعادلات الشرطية تحتوي دوماً على عدد من المجاهيل يزيد عن عدد المعادلات (الشروط). على سبيل المثال تشكل الجملة (1.8) أو (1.9) مجموعة من المعادلات التي عددها n أما عدد المجاهيل فهو $n+u$ مجهول ، حيث نعلم أن n هو عدد الرواسب أما u فهو عدد الوسطاء. بصورة مشابهة تشكل الجملة (1.17) أو (1.18)مجموعة معادلات عددها r معادلة بدلالة عدد n من المجاهيل (التي هي الرواسب فقط في هذه الحالة) وحيث أن $n > r$ دوماً بموجب (1.7) وبالتالي في هذه الحالة أيضاً عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات.

إن تطبيق قاعدة الحل الأمثل المكافئللنهاية الصغرى للتابع $\phi = \sum_n v_i^2 \rightarrow min$ يقود إلى مجموعة جديدة من المعادلات الإضافية التي باتحادها مع مجموعة الشروط تؤدي في النهاية إلى حل وحيد مكافئ لحل جملة معادلات خطية نظامية (عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلاتوهذه المعادلات مستقلة ولها دوماً حل غير الحل التافه).

إن الخوارزمية المتبعة في تطبيق مبدأ الحل الأمثل بالمربعات الصغرى للرواسب يختلف حسب التقنية المتبعة في صياغة الشروط وبالتالي تقنية التعديل التي نختارها و لهذا سوف نقوم باشتقاق المعادلات الإضافية بموجب مبدأ الحل الأمثل بصورة منفصلة.

اشتقاق معادلات طريقة تعديل القياسات غير المباشرة

سوف نتقيد بالإشتقاقات التي توصلنا إليها في الفقرتين السابقتين و في الأمثلة السابقة لكي نبقي على عدم التعقيد في المعالجات التمهيدية لعملية التعديل بالمربعات الصغرى. لهذا سوف نفترض أن الأرصاد الخمسة الممثلة لفرق الإرتفاع المقاس على كل مسار من المسارات الخمسة مستقلة إحصائياً و موزونة بشعاع أوزان $W = diag\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{bmatrix}$؛ أي أن القياسات غير متساوية الدقة و بهذه الفرضية تكون قاعدة المربعات الصغرى للرواسب (1.3):

$$\phi = w_1 \cdot v_1^2 + w_2 \cdot v_2^2 + \cdots + w_n \cdot v_n^2 \rightarrow min\ imum$$

نعود إلى المعادلات الشرطية (1.13) في المثال (2)و نعوض قيم v_i بما يساويها في تلك المعادلات في القاعدة الأخيرة:

$$\begin{aligned} \phi = w_1 \cdot (f_1 + \delta_1)^2 + w_2 \cdot (f_2 - \delta_1 + \delta_2)^2 + \cdots \\ + w_3 \cdot (f_3 + \delta_2)^2 + w_4 \cdot (f_4 - \delta_2 + \delta_3)^2 + \cdots \\ + w_5 \cdot (f_5 + \delta_3)^2 \rightarrow min\ imum \end{aligned} \tag{1.25}$$

كي تكون القاعدة الخيرة محققة ، فإن جميع المشتقات الجزئية للتابع ϕ بالنسبة للمجاهيل $[\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3]$ يجب أن تكون معدومة :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial \delta_1} = 2 \cdot w_1 \cdot (f_1 + \delta_1) - 2 \cdot w_2 \cdot (f_2 - \delta_1 + \delta_2) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \delta_2} = 2 \cdot w_2 \cdot (f_2 - \delta_1 + \delta_2) + 2 \cdot w_3 \cdot (f_3 + \delta_2) \\ \quad - 2 \cdot w_4 \cdot (f_4 - \delta_2 + \delta_3) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \delta_3} = 2 \cdot w_4 \cdot (f_4 - \delta_2 + \delta_3) + 2 \cdot w_5 \cdot (f_5 + \delta_3) = 0 \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

نعيد ترتيب المعادلات الأخيرة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} (w_1 + w_2) \cdot \delta_1 & -w_2 \cdot \delta_2 & +0 & = & -w_1 \cdot f_1 + w_2 \cdot f_2 \\ -w_2 \cdot \delta_1 & +(w_2 + w_3 + w_4) \cdot \delta_2 & -w_4 \cdot \delta_3 & = & -w_2 \cdot f_2 - w_3 \cdot f_3 + w_4 \cdot f_4 \\ 0 & -w_4 \cdot \delta_2 & +(w_4 + w_5) \cdot \delta_3 & = & -w_4 \cdot f_4 - w_5 \cdot f_5 \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

و للتعبير عن هذه المعادلات بصورة مصفوفات نتذكر من (1.15) معنكل من الأشعة Δ و f ، أما W فهي مصفوفة الأوزان ذات العناصر القطرية، و المصفوفة B هي مصفوفة أمثال المعادلات الشرطية وفق التقنية الأولى في التعديل. سنوجد الجداء المصفوفي $B^t \cdot W \cdot B$ من المثال الثاني:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \cdots$$

$$B^t \cdot W \cdot B = \begin{bmatrix} w_1 + w_2 & -w_2 & 0 \\ -w_2 & w_2 + w_3 + w_4 & -w_4 \\ 0 & -w_4 & w_4 + w_5 \end{bmatrix}$$

(1.28)

لو ضربنا هذه النتيجة (أي المصفوفة الأخيرة المتناظرة) بالشعاع Δ لحصلنا على الطرف الأيسر من المعادلات (1.27). لنوجد الآن الجداء المصفوفي $B^t \cdot W \cdot f$ من المثال الثاني:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \cdots$$

$$B^t \cdot W \cdot f = \begin{bmatrix} -w_1 \cdot f_1 + w_2 \cdot f_2 \\ -w_2 \cdot f_2 - w_3 \cdot f_3 + w_4 \cdot f_4 \\ -w_4 \cdot f_4 - w_5 \cdot f_5 \end{bmatrix}$$

(1.29)

و هذا يشكل الطرف اليميني من المعادلات (1.27). إذن نستطيع كتابة المعادلات (1.27) بصيغة المصفوفات كما يلي:

$$\boxed{\left(B^t \cdot W \cdot B\right) \cdot \Delta = B^t \cdot W \cdot f} \qquad (1.30)$$

بالرغم من أنه تم اشتقاق هذه العلاقة الأخيرة من مثال بسيط { المثال }(1) لكنها كما سنرى فيما بعد صالحة لحل مسائل عامة في تعديل الشبكات طالما أنه يمكن كتابة الشروط بالصيغة(1.16) بالإضافة إلى أنه لا يوجد أي تقييد فيما يتعلق بمصفوفة الأوزان W أو خصائصها الإحصائية.

توفر قاعدة المربعات الصغرى $\phi = v^t \cdot W \cdot v \rightarrow min\ imum$ شرطاً إضافياً لكنه أساسياً لإيجاد الحل الأمثل لجملة المعادلات $v + B \cdot \Delta = f$ الفائضة. نكتب هذه المعادلات بالشكل $v = f - B \cdot \Delta$ ونعوض في قيمة التابع ϕ:

$$\begin{aligned} \phi &= (f - B \cdot \Delta)^t \cdot W \cdot (f - B \cdot \Delta) = \cdots \\ & f^t \cdot W \cdot f - f^t \cdot W \cdot B \cdot \Delta - \Delta^t \cdot B^t \cdot W \cdot f + \Delta^t \cdot B^t \cdot W \cdot B \cdot \Delta \end{aligned} \tag{1.31}$$

نظراً لأن جميع الحدود في الطرف الثاني من المعادلة الأخيرة هي كميات سلمية، وبالتالي فالحدين الثاني والثالث متساويين ونكتب التابع ϕ بالشكل:

$$\phi = f^t \cdot W \cdot f - 2 \cdot f^t \cdot W \cdot B \cdot \Delta + \Delta^t \cdot B^t \cdot W \cdot B \cdot \Delta \tag{1.32}$$

ولكي يبلغ هذا التابع النهاية الصغرى ، يجب أن يكون المشتق الأول لهذا التابع معدوم : $\dfrac{\partial \phi}{\partial \Delta} = 0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \Delta} = -2 \cdot f^t \cdot W \cdot B + 2 \cdot \Delta^t \cdot B^t \cdot W \cdot B \qquad = 0 \tag{1.33}$$

نقسم على 2 و بأخذ منقول الحدين الأول والثاني وبعد الترتيب نحصل على نفس العلاقة (1.30)

$$\left(B^t \cdot W \cdot B\right) \cdot \Delta = B^t \cdot W \cdot f \tag{1.34}$$

وهي جملة معادلات نظامية من الشكل $N \cdot \Delta = t$ ، حيث $N = \left(B^t \cdot W \cdot B\right)$ و $t = B^t \cdot W \cdot f$ وحل هذه الجملةيأخذ الشكل:

$$\Delta = \left(B^t \cdot W \cdot B\right)^{-1} \cdot (B^t \cdot W \cdot f) = N^{-1} \cdot t \tag{1.35}$$

تدعى المصفوفة $N = \left(B^t \cdot W \cdot B\right)$ بمصفوفة معاملات المعادلات النظامية و $t = B^t \cdot W \cdot f$ بشعاع الثوابت. إن دقة المجاهيل في هذه المعادلات (هم الوسطاء في المعادلات الشرطية) يُعبر عنها بواسطة مصفوفة التباينات وتمام التباينات $Q_{\Delta\Delta}$. هذا ويمكن الحصول على هذه المصفوفة بتطبيق قوانين انتشار الأخطاء. لنكتب العلاقة الأخيرة مرةً ثانية بالشكل

$$\Delta = N^{-1} \cdot B^t \cdot W \cdot f = N^{-1} \cdot B^t \cdot W \cdot (d - l) \tag{1.36}$$

من ملاحظة جميع المصفوفات الداخلة في العلاقة الأخيرة نجد أن الشعاع l هو الشعاع الوحيد في الطرف اليميني الذي يتألف من متحولات عشوائية نظراً لأن الشعاع d هو شعاع قيم ثابتة. و للتسهيل سنجعل $Q_{ll} \equiv Q$ ونكتب:

$$Q_{\Delta\Delta} = J_{\Delta f} \cdot Q_{ll} \cdot J^t{}_{\Delta f} = (-N^{-1} \cdot B^t \cdot W) \cdot Q \cdot (-N^{-1} \cdot B^t \cdot W)^t$$
$$= N^{-1} \cdot B^t \cdot W \cdot Q \cdot W \cdot B \cdot N^{-1} \qquad (1.37)$$

نظراً لأن N^{-1} و W مصفوفات متناظرة ، وبما أن $W \cdot Q = Q^{-1} \cdot Q = I$ وأن $B^t \cdot W \cdot B = N$ نعود ونعوض في (1.37)

$$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1} \cdot B^t \cdot W \cdot Q \cdot W \cdot B \cdot N^{-1} = \cdots$$
$$N^{-1} \cdot B^t \cdot W \cdot B \cdot N^{-1} = N^{-1} \cdot N \cdot N^{-1} = N^{-1}$$

نصل إلى النتيجة الهامة:

$$\boxed{Q_{\Delta\Delta} = N^{-1}} \qquad (1.38)$$

بعد حساب شعاع المجاهيل Δ نقوم بحساب شعاع الرواسب v من العلاقة $v = f - B \cdot \Delta$ (1.16) ومنه نحسب التقدير المعدل للقياسات من العلاقة

$$\hat{l} = l + v = l + f - B \cdot \Delta \qquad (1.39)$$

أما مصفوفة التباين لشعاع الأرصاد المعدل فتحسب من:

$$Q_{\hat{l}\hat{l}} = B \cdot N^{-1} \cdot B^t \qquad (1.40)$$

والتباين المرجع $\hat{\sigma}_o^2$ باستخدام شعاع الرواسب ومصفوفة الأوزان:

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{v^t \cdot w \cdot v}{r} \qquad (1.41)$$

حيث أن r يمثل العدد الفائض (أو عدد درجات الحرية). أخيراً نحصل على مصفوفات التباين وتمام التباين بالواحدات الفعلية بعد ضربها بالتباين المرجع

$$\sum_{\Delta\Delta} = \hat{\sigma}_o^2 \cdot Q_{\Delta\Delta} \quad ,$$
$$\sum_{\hat{l}\hat{l}} = \hat{\sigma}_o^2 \cdot Q_{\hat{l}\hat{l}} \qquad (1.42)$$

قسم المسائل والأمثلة

مثال (1): قيست مسافة 6 مرات وكانت النتائج كما يلي:

74.31 m, 74.28 m, 74.32 m, 74.33 m, 74.30 m, 74.31 m.

المطلوب تحديد القيمة المتوقعة (أو ذات الأرجحية العظمى) للمسافة وفق التربيعات الصغرى.

الحل:

إذا اعتبرنا أن القيمة المتوقعة (المحتملة) للمسافة هي $\hat{l}$. وكانت القيم الستة المرصودة لهذه المسافة هي $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ وقيم الرواسب (الأخطاء) هي $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ حيث:

$$\upsilon_1 = \hat{l} - l_1; \qquad \upsilon_2 = \hat{l} - l_2; \qquad \upsilon_3 = \hat{l} - l_3$$

$$\upsilon_4 = \hat{l} - l_4; \qquad \upsilon_5 = \hat{l} - l_5; \qquad \upsilon_6 = \hat{l} - l_6.$$

ولدينا مبدأ التربيعات الصغرى كما يلي:

$$\phi = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2 + \upsilon_4^2 + \upsilon_5^2 + \upsilon_6^2 = \text{a minimum}$$

$$= (\hat{l} - l_1)^2 + (\hat{l} - l_2)^2 + (\hat{l} - l_3)^2 + (\hat{l} - l_4)^2 + (\hat{l} - l_5)^2 + (\hat{l} - l_6)^2 = \text{a minimum.}$$

كي تحقق الصيغة الأخيرة المبدأ، نشتق المعادلة ونجعل قيمتها معدومة:

$$\frac{d\phi}{d\hat{l}} = 2(\hat{l} - l_1) + 2(\hat{l} - l_2) + 2(\hat{l} - l_3) + 2(\hat{l} - l_4) + 2(\hat{l} - l_5) + 2(\hat{l} - l_6) = 0$$

$$6\hat{l} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6$$

$$\hat{l} = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6}{6}$$

$$= \frac{74.31 + 74.28 + 74.32 + 74.33 + 74.30 + 74.31}{6}$$

$$= \mathbf{74.31\ \ m}.$$

مثال (2): قيست زاوية ستة مرات من قبل ستة أشخاص (باستخدام نفس الجهاز) وكانت النتائج:

$$42°25'10'' \ (2),\ 42°25'08'' \ (1),\ 42°25'09'' \ (3),\ 42°25'07'' \ (2),\ 42°25'11'' \ (3),\ 42°25'09'' \ (2).$$

القيم المعطاة بين قوسين تُمثل الأوزان (ω) لهذه القياسات. حدد القيمة المقدرة (الأكثر إحتمالاً) لقياس الزاوية بطريقة المربعات الصغرى.

الحل:

لندع الأرصاد $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ وأوزانها $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ والرواسب (أو الأخطاء) $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ ولتكن $\hat{\alpha}$ هي القيمة المقدرة المطلوبة للزاوية. كما سبق نكتب أولاً

$$\upsilon_1 = \hat{\alpha} - \alpha_1; \qquad \upsilon_2 = \hat{\alpha} - \alpha_2; \qquad \upsilon_3 = \hat{\alpha} - \alpha_3$$
$$\upsilon_4 = \hat{\alpha} - \alpha_4; \qquad \upsilon_5 = \hat{\alpha} - \alpha_5; \qquad \upsilon_6 = \hat{\alpha} - \alpha_6.$$

ومن ثم نضع مبدأ التربيعات الصغرى كما يلي:

$$\phi = \omega_1\upsilon_1^2 + \omega_2\upsilon_2^2 + \omega_3\upsilon_3^2 + \omega_4\upsilon_4^2 + \omega_5\upsilon_5^2 + \omega_6\upsilon_6^2 = \text{a minimum}$$

لدينا $\omega_i \mathrm{v}_\mathrm{i}^2 = \omega_\mathrm{i}(\hat{\alpha} - \alpha_i)^2, \mathrm{i} = 1,2, \dots 6$. ونعلم كي يتحقق من أجل ϕ النهاية الصغرى يجب أن يكون المشتق معدوم:

$$\frac{d\phi}{d\hat{\alpha}} = \begin{bmatrix} 2\omega_1(\hat{\alpha}-\alpha_1) + 2\omega_2(\hat{\alpha}-\alpha_2) + 2\omega_3(\hat{\alpha}-\alpha_3) + 2\omega_4(\hat{\alpha}-\alpha_4) \\ +2\omega_5(\hat{\alpha}-\alpha_5) + 2\omega_6(\hat{\alpha}-\alpha_6) \end{bmatrix} = 0$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \omega_3\alpha_3 + \omega_4\alpha_4 + \omega_5\alpha_5 + \omega_6\alpha_6}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6)}$$

وهذه كما نعلم هي صيغة المتوسطة الموزونة. إذن

$$\hat{\alpha} = 42°25' + \frac{2\times10'' + 1\times8'' + 3\times9'' + 2\times7'' + 3\times11'' + 2\times9''}{(2+1+3+2+3+2)} = \mathbf{42°25'9.2''}.$$

مثال (3): قيست زوايا مثلث مستوي بنفس الدقة وحصلنا على القياسات الثلاث للزوايا كما يلي:

$$\theta_1 = 52°33'; \qquad \theta_2 = 64°45'; \qquad \theta_3 = 62°39'.$$

المطلوب تحديد القيم المقدرة للزوايا الثلاث بعد التعديل بموجب المربعات الصغرى.

الحل:

لتكن قيم الزوايا الأكثر إحتمالاً (المعدلة) هي : $\hat{\theta}_1\hat{\theta}_{2,}\hat{\theta}_3$

وقيم الرواسب (الأخطاء) هي: v_1, v_2, v_3 ونكتب

$$\hat{\theta}_1 = \theta_1 + v_1$$
$$\hat{\theta}_2 = \theta_2 + v_2$$
$$\hat{\theta}_3 = \theta_3 + v_3.$$

وكما هو معلوم في المثلث المستوي مجوع الزوايا $180°$ إذن

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3 &= 180° \\
(\theta_1 + v_1) + (\theta_2 + v_2) + (\theta_3 + v_3) &= 180° \\
v_1 + v_2 + v_3 &= 180° - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
&= 180° - (52°33' + 64°45' + 62°39') \\
&= 180° - 179°57' = +\ 3'
\end{aligned}$$

ومنه

$$v_3 = 3' - (v_1 + v_2).$$

الآن نضع مبدأ التربيعات الصغرى :

$$\phi = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \text{a minimum}$$
$$\phi = v_1^2 + v_2^2 + (3' - v_1 - v_2)^2 = \text{a minimum.}$$

نقوم بالإشتقاق كما في السابق:

$$\frac{\partial \phi}{\partial v_1} = 2v_1 - 2(3' - v_1 - v_2) = 0$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial v_2} = 2v_2 - 2(3' - v_1 - v_2) = 0$$
$$2v_1 + v_2 = 3'$$
$$v_1 + 2v_2 = 3'.$$

بحل هاتين المعادلتين الخطيتين (التي تدعى جملة المعادلات النظامية) بمجهولين هما v_1, v_2 نحصل

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 1' \\
v_2 &= 1' \\
v_3 &= 3' - 1' - 1' = 1'.
\end{aligned}
$$

وبالتالي تكون القيم المقدرة للزوايا الثلاث بعد التعديل بموجب المربعات الصغرى :

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_1 &= 52°33' + 1' = \mathbf{52°34'} \\
\hat{\theta}_2 &= 64°45' + 1' = \mathbf{64°46'} \\
\hat{\theta}_3 &= 62°39' + 1' = \mathbf{62°40'} \\
\text{Total} &= 180° \qquad (\textit{Check}).
\end{aligned}
$$