مقدمة في تعديل القياسات المساحية بالتربيعات الصغرى

د.م. محمد العبدالله

مقدمة

الغاية الأساسية من تعديل القياسات أو الأرصاد في الشبكات الطبوغرافية و المساحة التصويرية و الجيوديزيا هي الحصول على الحل الأمثل باستخدام تقنية المربعات الصغرى للرواسب. و منذ التطبيق الأول لها في حل مسألة فلكية من قبل العلامة غاوص، أصبحت هذه التقنية تطبق في عددٍ كبيرٍ من فروع العلوم و الهندسة بمختلف أنواعها. بالإضافة إلى أنه وبعد أن عُززت هذه التقنية بإمكانات حاسوبية ضخمة أُعيد النظر في المعالجات المصفوفية و المفاهيم الإحصائية كي تدعم حساب الأخطاء و تقدير الدقة.

قبل الشروع بالرصد، يجب أن يعين النموذج الرياضي العام الذي يصف النظام المدروس و عادة يكون هذا النظام مغلق ومحدود، بمعنى آخر يمكن تعيين النموذج الرياضي بعدد محدود من المتحولات ، قد تكون هذه عبارة عن وسطاء (parameters) أو قياسات (observations) أو كلاهما معاً، و يجب أن يصف النموذج العلاقات التي تربط بين كلا النوعين.

هنالك دوماً عدد أصغري من المتحولات المستقلة التي تحدد النموذج المدروس بشكل وحيد. وهنا من المهم أن نتذكّر بأنه يمكن التعبير عن نفس الموضوع الفيزيائي أو مجموعة الوقائع الفيزيائية بنماذج رياضية مختلفة. لهذه النماذج عناصر مختلفة تعتمد على الإختيار الخاص المعمول لتحقيق هدف معين أو حاجة معينة. يتم الإختيار على توصيف المسألة بدقة و عندها يجب أن يكون العدد الأصغري للمتحولات قد أصبح معروفاً بالرغم من بقاء اختيار المتحولات الحقيقية غير إلزامي. بمعنى آخر، أننا نحدد العدد الأصغري للمتحولات بدون الحاجة إلى تحديد المتحولات الخاصة.

فمثلاً يتحدد شكل المثلث المستوي (كنموذج رياضي هندسي) بطريقة واحدة بواسطة متحولين فقط يشكلان العدد الأصغري. بالإمكان أن يكونا أي زاويتين من الزوايا الثلاث أو بطريقة أخرى نأخذ نسبةأطوال الأضلاع وهنا إذا عرفنا إثنتين منهما نكون قد حددنا الشكل. من جهة أخرى إذا كان حجم المثلث المستوي ذو أهمية أيضاً فهذا نموذجاً رياضياً آخراً يتطلب على الأقل ثلاث متحولات مختلفة (شريطة أن لا تكون جميعها زوايا نظراً لأن الحجم يتطلب بعداً خطياً) و من هنا نجد أن هنالك خيارات عديدة ممكنة، مثل قياس زاوتين وطول ضلع من الأضلاع أو قياس زاوية وضلعين أو قياس الأضلاع الثلاث.

وهكذا عندما يتم اختيار النموذج الرياضي للمسألة ، يجب أن نحدد العدد الأصغري من المتحولات أو العناصر اللازمة لتحديد النموذج بصورة فريدة. سيشار إلى هذا العدد الأصغري دوماً بالرمز n_o. من جهة أخرى نشير إلى عدد العناصر المقاسة (ندعوها الأرصاد) بالرمز n وهذا العدد يجب أن يكون على الأقل مساوياً للعدد الأصغري n_o وإلا فإن النموذج ناقص والمسألة غير قابلة للحل. إذاً القاعدة الأساسية في كافة

مسائل التعديل بشكل عام هي أنه يجب أن يكون $n > n_o$. أما القاعدة الأساسية الثانية فهي أن تكون العناصر المقاسة (الأرصاد) مستقلة إحصائياً. بمعنى آخر قد تم قياس كل منها بصورة مستقلة عن الأرصاد الباقية و نقول في هذه الحالة أنه لا يوجد ارتباط خطي بين الأرصاد.

عندما يكون $n > n_o$ وهذا أمر طبيعي في مسائل التعديل بمعنى أنه لا بد من وجود فائض في العناصر المقاسة ونرمز إلى هذا الفائض في العناصر بالرمز r وهو يساوي إلى $n - n_o$. هذا الفائض يشكل عدد درجات الحرية(degree of freedom)من وجهة النظر الإحصائية.

وتجدر الإشارة إلى أنه لا يكون للفائض r معنى إلا إذا كانت العناصر المقاسة n والنموذج الرياضي متفقة مع بعضها، إذ قد نواجه وضعية فيها عدد العناصر المقاسة غير كاف بالرغم من الوجود الظاهري للفائض، لهذا علينا أن نتأكد دوماً من وجود حل رياضي للمسألة قبل الدخول في موضوع التعديل. (فمثلاً عدم وجود قياس لأحد أضلاع المثلث لن يؤدي في النهاية إلى شكل وحجم المثلث الفعلي حتى لو أجرينا عدداً كبيراً من القياسات للزوايا فقط).

بسبب الخصائص الإحصائية للقياسات من الطبيعي أن لا تكون القياسات الفائضة منسجمة تماماً مع النموذج الرياضي.و كدليل على ذلك عندما نقيس الزوايا الثلاث في مثلث بصورة مستقلة $n = 3, n_o = 2$ فسيكون لدينا فائض يساوي $r = n - n_o = 1$ ولهذا عندما نجمع القياسات الثلاثة لزوايا المثلث فسنجد أنها لا تساوي 180° بالضبط.

في الحالة الأخيرة لو استخدمنا قياسين فقط للزوايا يتحدد شكل المثلث لكننا في كل مرة سنحصل على شكل مختلف. بمعنى آخر إن أي مجموعة جزئية من القياسات المستقلة (الأرصاد) ذات العدد الأصغري n_oسوف تقود إلى نموذج رياضي مختلف أو نتيجة مختلفة، ولهذا السبب نحتاج إلى قواعد أو شروط إضافية كي نصل في النهاية إلى حل وحيد.

يتلخص المبدأ الأساسي في للتعديل في اشتقاق مجموعة منفردة وحيدة من التقديرات من أجل جميع متحولات النموذج ، بخصائص معينة تشكل الحل الأمثل للمسألة أو أفضل تقدير للنموذج الرياضي. لو رمزنا إلى المجموعة الأصلية من القياسات بالشعاع l والتي نعلم ضمناً أنها تحتوي على قياسات فائضة $r > 0$وهذه هي التي تسبب التناقض في النموذج. بعد التعديل تُستبدل القياسات الأصلية بقياسات جديدة معدلة نرمز لها بالرمز $\hat{l}$وهذه منسجمة مع النموذج تماماً.

تختلف المجموعة الجديدة من التقديرات $\hat{l}$ عن المجموعة الأصلية من القياسات l بفارق يسمى اصطلاحاً شعاع التصحيحات أو شعاع الرواسب v و نعبر عنه من وجهة نظر التصحيحات، أي لو أضفنا هذه التصحيحات إلى الشعاع الأصلي للقياسات l لحصلنا على التقديرات الجديدة $\hat{l}$ وبالتالي:

$$\hat{l} = l + v \tag{1.1}$$

$$v = \hat{l} - l \tag{1.2}$$

أو يلعب شعاع التصحيحات أو الرواسب v دوراً هاماً في عملية التعديل و أحياناً نلجأ إلى تحليل قيم هذا الشعاع لاختبار كفاية النموذج. و في بعض الحالات قد يؤدي هذا التحليل حتى إلى طرح أو استبعاد النموذج الرياضي الأصلي و إعادة صياغة نموذج المسألة من جديد.

بوجود الفائض $r > 0$ سيكون هنالك عدداً غير محدود من التقديرات $\hat{l}$ طالما أن شعاع الرواسب $v = \hat{l} - l$ كيفي ولا يتبع قاعدة محددة.

تتلخص تقنية التربيعات الصغرى وفق طريقة الحل الأمثل في إيجاد مجموعة من الرواسب $v = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ تكون بطريقة ما هي التي تشكل الحل الأمثل. في الحالة الأبسط يكون الحل الأمثل هو مجرد عملية أيجاد النهاية الحدية الصغرى لمجموع القيم المطلقة لهذه الرواسب. لكنهفي الحالات المتقدمة التي لها مزايا عديدة سنذكرها فيما بعد، يخضع النموذج الرياضي إلى قاعدة أو شرط نسعى من أجله إلى إيجاد النهاية الصغرى لمجموع مربعات عناصر شعاع الرواسب $v = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ و من هنا أتت تسمية "تعديل المربعات الصغرى"(*LEAST SQUARES ADJUSTMENT*).

يحاول هذا المبدأ التأكيد على أن التقديرات $\hat{l}$ هي أقرب ما يكون إلى القيم الأصلية لعينة الأرصاد l، مع الأخذ بعين الإعتبار خصائصها الإحصائية. و من الواضح أن قاعدة كهذه مقنعة نظراً لأن العينة l هي كل ما لدينا وبالتالي هي أفضل من يمثل النموذج الرياضي ولهذا السبب نسعى إلى أن يكونمجموع مربعاتالتغيرات أو التناقضات v في نهايتها الحدية الصغرى. وهكذا نكتب مبدأ المربعات الصغرى:

$$\phi = v^t \cdot W \cdot v \rightarrow \min \qquad (1.3)$$

حيث أن W هي مصفوفة الوزن التي تتبع القياسات l . و هي مصفوفة مربعة بالمرتبة $n \times n$.

تعكس هذه المصفوفة الخصائص الإحصائية للقياسات و هي تتغير بتغير العلاقات الداخلية أو درجة الإرتباط الداخلي بين القياسات وهي كما سنرى فيما بعد تمثل مقلوب مصفوفة الإرتباط الداخلي $W = Q^{-1}$.

تشكل قاعدة النهاية الصغرى المعطاة أعلاه التعبير الأكثر عمومية، ويمكن اشتقاق حالات خاصة عديدة تختلف عن بعضها البعض حسب مصفوفة الأوزان W . في حالة خاصة، عندما نعتبر عدم وجود ارتباط تبادلي بين القياسات l ، تكون مصفوفة الأوزان في هذه الحالة قطرية (diagonal) ويصبح مبدأ المربعات الصغرى :

$$\phi = w_1 \cdot v_1^2 + w_2 \cdot v_2^2 + \cdots + w_n \cdot v_n^2 \rightarrow \min \qquad (1.3)$$

حيث w_i هو العنصر القطري في السطر i من المصفوفة W و v_i هو الراسب المرافق للقياس l_i . كذلك في الحالة الأبسط عندما يتم الحصول على أرصاد بدقة متساوية مع استمرار عدم وجود الإرتباط التبادلي (cross-correlation) ، فإن مصفوفة الأوزان تصبح مساوية للمصفوفة الأحادية I. وقاعدة المربعات الصغرى تصبح:

$$\phi = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 \rightarrow \min \qquad (1.4)$$

هذه الصيغة الأخيرة هي الصيغة الأقدم ومنها أتت تسمية "المربعات الصغرى" (least squares) ، نظراً لأننا نسعى في هذه الحالة إلى إيجاد النهاية الصغرى لمجموع مربعات الرواسب v_i .

السبب الذي يقف وراء الاستعمال الواسع لتقنية التربيعات الصغرى في حقول عديدة يكمن في الحقيقة أنها دوماً تؤدي إلى نفس النتيجة مهما اختلفت النماذج الرياضية المعبرة عن المشكلة. يشكل النموذج الرياضي نقطة البداية التي تقوم عليها الفلسفة الأساسية لعملية التعديل. متى أُنجز ذلك ، يتجه الاهتمام نحو بعض الشروط والنواحي الحسابية في اختيار تقنية ما لتشكيل المعادلات و تطبيق قاعدة التربيعات الصغرى.

إن حسابات التربيعات الصغرى تؤدي دوماً إلى تقديرات جديدة لجميع متحولات النموذج بالإضافة إلى مصفوفات التباين وتمام التباين. بعد تطبيق الخوارزمية الحسابية على المعطيات، تبقى هنالك خطوة أخرى ضرورية وهي تقييم النتائج إحصائياً. في الحقيقة إذا كانت درجة تعقيد المسألة كبيرة فإن التقييم الإحصائي قد يقودنا إلى إعادة صياغة النموذج، إذا وجد بأن النموذج الأصلي غير واف بالغرض. بعد أن يتم وضع النموذج الرياضي والنموذج الإحصائي ، تطبق تقنية المربعات الصغرى على مجموعة من التوابع والمعادلات أو الشروط في المسألة،حيث يجب أن تصف هذه المعادلات المشكلة للنموذج الرياضي المسألة بصورة صحيحة وتامة.

قد يحتوي النموذج بالإضافة إلى القياسات أو الأرصاد على متحولات أخرى و ثوابت رقمية. هذه العائلة من المتحولات تسمى وسطاء (PARAMETERS) وهي تكون عادةً قيماً مجهولة في النموذج الرياضي عند بداية التعديل، لكنها بعد التعديل تحصل على قيم تقديرية خاضعة للاختباراتوتعامل بطريقة مشابهة للمتحولات العشوائية الممثلة للقياسات. في الحقيقة بعد التعديل يكون لدينا تقديرات جديدة لكل من القياسات والوسطاء و كذلك نحصل علىمصفوفات التباين وتمام التباين بقيم مقدرة أيضاً و لجميع المتحولات الداخلة في النموذج.

المعادلات الشرطية والمعادلات الوسيطية

بعد تحديد الفائض نتابع عملية التعديل بكتابة المعادلات التي تربط متحولات النموذج و عددها يعكس الفائض في الأرصاد ويشار إلى هذه المعادلات بالمعادلات الشرطية (Condition equations). يجب أن تحتوي هذه الشروط التي نصيغها من أجل مسألة معطاة على المتحولات المجهولة الإضافية أيضاً. هذه المتحولات الإضافية هي متحولات عشوائية تدعى بالوسطاء. الفارق الوحيد الذي يميز الوسيط عن القيمة المرصودة هو أن الوسيط (the parameter)ليس له تقدير مسبق قبل التعديل في حين أن القيم المرصودة أو القياسات (observations) لها تقديرات مسبقة. بعد أول عملية تعديل واحد فقط تصبح هنالك قيم تقديرية لكل من المجموعتين القياسات والوسطاء و كلما أعيدت عملية التعديل خصوصاً من أجل النماذج غير الخطية نحصل على تقديرات جديدة للمجموعتين أفضل من المرحلة السابقة و تتوقف عملية الإعادة عندما تصبح الدقة ضمن حدود معينة.

باختصار إذا كان الفائض r، فهذا يعني أنه يوجد عدد r من المعادلات الشرطية المستقلة وهذه المعادلات مرتبطة بعدد n من الأرصاد. و إذا كان عدد المتحولات الإضافية المجهولة التي ندعوها بالوسطاء u أيضاً مشمولة في عملية التعديل فسيكون العدد c:

$$c = r + u \tag{1.5}$$

هو العدد الإجمالي للمعادلات الشرطية والمعادلات الوسيطية والتي ندعوها جميعها بالشروط فقط. وهي القاعدة الأولى.

وكي تكون المتحولات الإضافية (الوسطاء) مستقلة وظيفياً، فإن عددها u يجب أن لا يتجاوز القيمة الصغرى n_o لعدد المتحولات التي تصف النموذج الرياضي وهي القاعدة الثانية. إذن يجب أن يكون

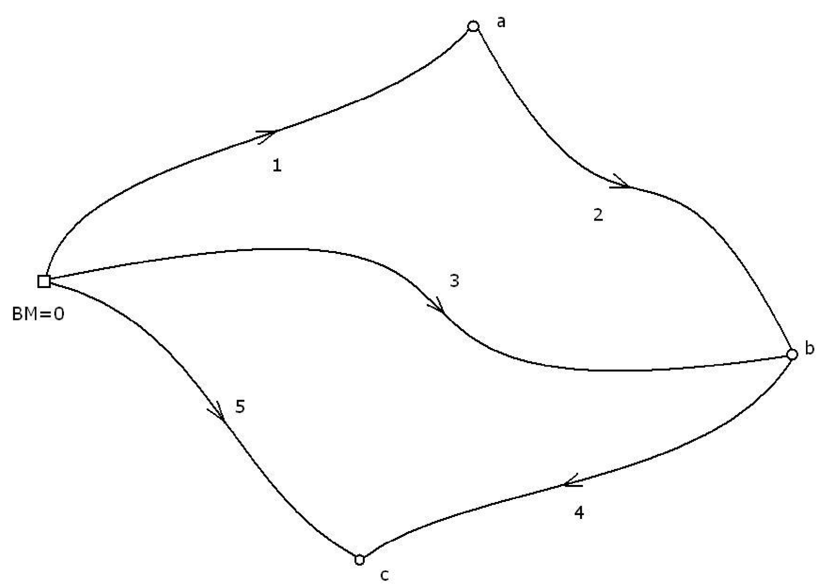
$$0 \le u \le n_o \tag{1.6}$$

و بصورة مشابهة تنص القاعدة الثالثة، أنه لكي تكون الشروط(المعادلات الشرطية والمعادلات الوظيفية) مستقلة ، يجب أن لا يتجاوز عددها c العدد الكلي للقياسات n، و لا يقل عن عدد الفائض r :

$$r \le c \le n \tag{1.7}$$

لتوضيح هذه القواعد و كي نستطيع فهم ماذا نعني بالوسطاء ، لندرس المثال التالي:

<u>مثال (1):</u> الشكل يوضح شبكة تسوية صغيرة تتضمن علام تسوية معلوم الإرتفاع(BM=0) بالإضافة إلى ثلاث نقاط مجهولة الإرتفاع. ولتحديد هذه القيم المجهولة تم إجراء قياسات ارتفاعية عددها خمسة (تشكل فرق منسوب بين نقطتين) : $\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 \end{bmatrix}$



شكل (1)

إشارة السهم على كل مسار من المسارات تدل فقط على الطريقة التي تم فيها القياس و هي بالتالي تساعد في تشكيل المعادلات الشرطية. العدد الأصغري للمتحولات المجهولة في هذا النموذج هو $n_o = 3$ و بما أن عدد فروق الارتفاعات المقاسة (الأرصاد) $n = 5$ ، فإن هذا يعني أن لدينا فائض في القياسات $r = n - n_o = 2$. وبالتالي لا نستطيع كتابة أكثر من شرطين مستقلين يربطان بين عدد $n = 5$ من القياسات. هي:

$$l_1 + l_2 - l_3 = 0$$
$$l_3 + l_4 - l_5 = 0$$

بعد التعديل سيكون للمتحولات الخمسة هذه قيم تقديرية (معدلة) هي: $\hat{l}_1 \quad \hat{l}_2 \quad \hat{l}_3 \quad \hat{l}_4 \quad \hat{l}_5$ واعتماداً على هذه التقديرات الجديدة للقياسات نحسب ارتفاعات النقاط الثلاث المجهولة. وسوف نحصل على القيم نفسها مهما كان الطريق المتبع في حسابها، فمثلاً ارتفاع النقطة b يُحسب بثلاثة طرق:

$$h_b = h_{BM} + l_1 + l_2$$
$$h_b = h_{BM} + l_3$$
$$h_b = h_{BM} + l_5 + l_4$$

هنالك طريقة أخرى مختلفة تماماً في صياغة المعادلات إذا أخذنا بعين الإعتبار ارتفاعات النقاط $\left[h_a \quad h_b \quad h_c\right]$ و اعتبرنا هذهالمتحولات وسطاء في التعديل. في هذه الحالة لدينا عدد الوسطاء $u = 3$ و بالتالي سيكون عدد الشروط الكلي: $c = r + u = 5$

هنا تأخذ قيمة u حدها الأعلى $u = n_o = 3$ وكذلك عدد الشروط يصل إلى حده الأعلى $c = n$ ، وعليه تُكتب المعادلات الشرطية –الوسيطية بالصيغة التالية:

$$h_{BM} + l_1 - h_a = 0$$
$$h_a + l_2 - h_b = 0$$
$$h_{BM} + l_3 - h_b = 0$$
$$h_b + l_4 - h_c = 0$$
$$h_{BM} + l_5 - h_c = 0$$

تُحسب القيم المقدرة للإرتفاعات المجهولة $\hat{h}_a \quad \hat{h}_b \quad \hat{h}_c$ بعد عملية التعديل اعتماداً على القيم المقدرة الجديدة لفروق الإرتفاع (الأرصاد المعدلة adjusted observations) أي ..
$\hat{l}_1 \quad \hat{l}_2 \quad \hat{l}_3 \quad \hat{l}_4 \quad \hat{l}_5$