مثال:

احسب قيمة المعين:

$$\begin{vmatrix} 99 & 18 & 63 \\ 11 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 11 & 2 & 7 \\ 11 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

وذلك بالاستفادة من القاعدة ٢.

٦- إذا كانت عناصر أحد الأسطر (أو الأعمدة) في معين مكونة من مجموع من الحدود (كما في المعين الواقع على يسار المساواة) ، فإنّ هذا المعين يساوي حاصل جمع المعينات على يمين المساواة .

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & a_1' + a_2' + a_3' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1' \\ b & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_2' \\ b & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_3' \\ b & b' \end{vmatrix}$$

يمكن التحقق من ذلك بنشر الطرفين .

٧- لا تتغير قيمة معين إذا أضفنا إلى عناصر أحد أسطره (أو أعمدته) العناصر المقابلة لها في سطر آخر (أو عمود) مضروبة بعدد ما.

أي إذا كانت المصفوفة B حصلنا عليها من Aعلى ذلك النحو فإنّ : $\det B = \det A$.

أي أنّ أي عدد من هذا النوع من العمليات على الأسطر (أو الأعمدة) ليس لها تأثير على قيمة $\det A$.

لنفرض أنّ $\det B$ حصلنا عليه من $\det A$ على النحو التالي:

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + Ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + ka_{13} \end{vmatrix}$$

أي أن قيمة المعين لم تتغير.

٨- إذا كانت A و B مصفوفتين **مربعتين** من المرتبة نفسها فإنّ :

$$\det AB = \det A \det B$$

***The* adjoint and inverse matrices: المصفوفة الملحقة ومقلوب مصفوفة**

سنوجد الآن صيغة لمقلوب مصفوفة من المرتبة 3×3 باستخدام العوامل المرافقة .

نعرّف **المصفوفة الملحقة** للمصفوفة A على أنها:

$$adj\ A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

ومنه فإن مقلوب مصفوفة يعطى بالعلاقة :

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{\det A}$$

المقلوب بدلالة ملحق مصفوفة ومعينها .

التحقق:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \frac{1}{\det A}$$

$$= \frac{1}{detA} \begin{bmatrix} \dots. & \dots. & \dots \\ \dots.. & \dots.. & \dots. \\ \dots. & \dots. & \dots. \end{bmatrix} = \frac{1}{detA} \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & det\ A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix} = I_3$$

لأنّ مجموع جداء عناصر أي سطر من مصفوفة بالعوامل المرافقة لها يساوي قيمة معين هذه المصفوفة . في حين أنّ مجموع جداء عناصر أي سطر بالعوامل المرافقة لسطر آخر يساوي الصفر. أي أنّ :

$$a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = \det A$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \det A$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \det A$$

في حين أن :

$$a_{11}c_{21} + a_{12}c_{22} + a_{13}c_{23} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0$$

مثال :

أوجد مقلوب المصفوفة A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

الحل :

لها مقلوب (غير شاذة) لأن معينها غير معدوم: $\det A = -4 \neq 0$

نحسب العوامل المرافقة:

$$C_{11} = -3 \qquad C_{12} = -1 \qquad C_{13} = -1$$

$$C_{21} = 5 \qquad C_{22} = -1 \qquad C_{23} = 3$$

$$C_{31} = -1 \qquad C_{32} = 1 \qquad C_{33} = 1$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

التحقق:

$$AA^{-1} = I_3$$

حل جملة معادلات جبرية خطية

Linear algebraic equations

قاعدة كرامر : Cramer's rule

إذا كان لدينا المعادلة الجبرية :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots\dots\dots\dots + a_{1n}x_n = 0$$

حيث: a_{1n} و ... ... و a_{12} و a_{11} ثوابت ، فإنّ المعادلة مثال عن معادلة خطية بالمجاهيل: x_n و ... . و x_2 و x_1 .

وإذا كان لدينا جملة من المعادلات الجبرية الخطية، كما في حالة المعادلة السابقة، فإنه يمكن حلها، في بعض الحالات، بحذف المتغيرات بالطريقة المعروفة.

فمثلاً: إذا كان لدينا المعادلتين:

$x_1 + 2x_2 = 4$ و $x_1 - x_2 = 1$ ،

بالحل المشتركِ نجد أنّ: $x_2 = 1$ و $x_1 = 2$.

وعموماً، إذا كان لدينا المعادلتين:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = d_1$ و $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = d_2$

بالحل المشترك نجد أنّ:

$$x_2 = \frac{d_2a_{11} - d_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{d_1a_{22} - d_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

بشرط أن يكون المقام $\neq 0$ ، لماذا؟

أي أنّ:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_{12} \\ d_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & d_1 \\ a_{21} & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

وتسمى هذه الصيغة " **قاعدة كرامر** " لحل جملة من المعادلات الخطية ، ويمكن تطبيقها على المعادلتين الخطيتين السابقتين.

سنرى بأنه إذا كان المقام = 0 فإنّ المعادلتين ليس لهما حل، أو لهما عدد لا نهائي من الحلول.

مثال:

حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = -7$$
$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -7$$

ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل (عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل).

الحل:

يمكن التعبير عن هذه المعادلات الثلاث على النحو المصفوفاتي التالي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

نكتب المعادلة المصفوفاتية : $AX = d\ (*)$

إذا كان مقلوب A موجوداً (أي أن A ليست شاذة) نجد من ضرب $(*)$ بـ A^{-1} :

$$X = A^{-1}d = \frac{adj\ A}{\det A} d$$

أي إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ فإنّ:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{adj\ A}{\det A} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} C_{11}d_1 + C_{21}d_2 + C_{31}d_3 \\ C_{12}d_1 + C_{22}d_2 + C_{32}d_3 \\ C_{13}d_1 + C_{23}d_2 + C_{33}d_3 \end{bmatrix}$$

حيث : ...... C_{13} و C_{12} و C_{11} العوامل المرافقة للعناصر :

...... a_{13} و a_{12} و a_{11} بالترتيب. *ومن تساوي المصفوفتين نجد أن:*

$$x_1 = \frac{1}{\det A}(C_{11}d_1 + C_{21}d_2 + C_{31}d_3) = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix}$$

وهي طريقة كرامر لحل ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل.

نلاحظ أنه لحساب قيمة x_1 نستبدل عناصر d بالعمود الأول في معين المصفوفة A ، ولحساب قيمة x_2 نستبدل عناصر d بالعمود الثاني في معين A ، وهكذا ....

ويمكن تعميم هذه الطريقة لحل n معادلة خطية تحوي n مجهولاً، حيث n أي عدد صحيح موجب. ولكنها ليست عملية لحل جملة معادلات خطية مؤلفة من أكثر من أربع معادلات خطية.

بالعودة إلى حل المثال السابق نجد أنّ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 * (-6 + 4) - 2 * (4 + 1) + 1 * (-8 - 3)$$
$$= -23 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{-1}{23} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & 3 & -1 \\ -7 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$x_2 = \frac{-1}{23} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -7 & -1 \\ 1 & -7 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$x_3 = \frac{-1}{23}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -7 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} =$$

أوجد قيم :x_1 و x_2 و x_3.

وهي طريقة كرامر لحل معادلات بثلاثة مجاهيل.

<u>مثال:</u>

حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x - z = 1$$

$$2x + y - z = 1$$

$$x + 2y + 5z = 2$$

الحل:

نكتب أولاً المعادلات على النحو المصفوفاتي: $AX = d$، ثم نوجد مقلوب المصفوفة A (في حال وجوده)، ثم نحسب مصفوفة المجاهيل، وتساوي : $X = A^{-1}\, d$.

أي أنّ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نحسب مقلوب مصفوفة الأمثال A وتساوي:

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{\det A}$$

- إنّ $\det A = 4$ فالمصفوفة A ليست شاذة ولها مقلوب .
- نحسب العوامل المرافقة :

$$C_{11} = 7 \qquad C_{12} = -11 \qquad C_{13} = 3$$

$$C_{21} = -2 \qquad C_{22} = 6 \qquad C_{23} = -2$$

$$C_{31} = 1 \qquad C_{32} = -1 \qquad C_{33} = 1$$

ومنه:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ومن ثم فإن حل جملة المعادلات هو (بعد التعويض في مصفوفة المجاهيل المذكورة آنفاً) :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ومن تساوي المصفوفتين نجد أن :

$$x = \frac{7}{4} \quad \text{و} \quad y = -\frac{7}{4} \quad \text{و} \quad z = \frac{3}{4}$$

ملاحظة :

من الضروري الإشارة إلى أن هذه الطريقة لا تصلح إلا إذا كان :

١. عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل.

٢. معين الأمثال لا يساوي الصفر.

هذا ويمكن حساب قيم المجاهيل مباشرة باستخدام قاعدة كرامر على النحو الذي أشرنا إليه:

$$x = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{7}{4}$$

$$y = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{7}{4}$$

$$z = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$$

تتمات في المعادلات الجبرية الخطية

العمليات السطرية الأولية : Elementary row operations

لنفرض لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = -7$$
$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -7$$

ومن الممكن القيام بالعمليات السطرية الأولية الثلاث التالية على المعادلات الخطية دون أن يؤثر ذلك على الحل المشترك لهذه المعادلات . والعمليات هي :

١. يمكن ضرب أي معادلة بثابت (بعدد) غير صفري.
٢. يمكن تغيير موضعي أي معادلتين.
٣. يمكن استبدال أي معادلة بحاصل جمعها مع مضاعفات أي معادلة أخرى (أي بعد ضربها بعدد ثابت).

سنقوم بتطبيق هذه العمليات على المعادلات السابقة على النحو التالي:

الخطوة الأولى:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$7x_2 + x_3 = -5 \qquad (r_2' = r_2 + 2r_1)$$
$$2x_2 - 3x_3 = -8 \qquad (r_3' = r_3 - r_1)$$

الخطوة الثانية:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$7x_2 + x_3 = -5$$

$$-\frac{23}{7}x_3 = -\frac{46}{7} \qquad \left(r_3' = r_3 - \frac{2}{7}r_2\right)$$

الخطوة الثالثة:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$x_2 + \frac{1}{7}x_3 = -\frac{5}{7} \qquad \left(r_2' = \frac{1}{7}\, r_2\right)$$

$$x_3 = 2 \qquad \left(r_3' = -\frac{7}{23}r_3\right)$$

الخطوة الرابعة:

بما أنّ $x_3 = 2$ ، ومنه (بالتعويض الإرجاعي) :

$$x_2 = -\frac{5}{7} - \frac{1}{7}x_3 = -1$$

$$x_1 = 1$$

<u>وتسمى هذه الطريقة " طريقة غاوص "</u> *Gaussian elimination*.

لذلك فإنه ليس من الضروري أن نكتب المعادلات الثلاث في كل مرة، لأنّ كل المعلومات تعطى " بالمصفوفة الموسّعة " *augmented matrix* التي مرتبتها $3X4$ المعنية بجملة المعادلات. وهي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -7 \\ 1 & 4 & -2 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & -8 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r_2' = r_2 + 2r_1 \\ r_3' = r_3 - r_1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{7} & -\frac{46}{7} \end{bmatrix} \qquad \left(r_3' = r_3 - \frac{2}{7}r_2\right)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r_2' = \frac{1}{7}\, r_2 \\ r_3' = -\frac{7}{23}r_3 \end{pmatrix}$$

وتسمى المصفوفة الأخيرة " شكلاً مدرجاً " echelon form ، وذلك لأنّ عناصرها الواقعة تحت القطر بدءاً من الجانب الأيسر في الأعلى تساوي الصفر.

ونستطيع الآن حل المعادلات باستخدام " التعويض الإرجاعي " back substitution كما في السابق.

ومن الممكن الآن إكمال طريقة غاوص باستكمال بعض العمليات السطرية الإضافية على المصفوفة المدرجة:

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r_1' = r_1 - r_3 \\ r_2' = r_2 - \frac{1}{7} r_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (r_1' = r_1 - 2r_2)$$

والمصفوفة الأخيرة تمثل مجموعة الحلول:

$$x_1 = 1 \quad \text{و} \quad x_2 = -1 \quad \text{و} \quad x_3 = 2$$

<u>مثال:</u>

حل جملة المعادلات التالية بعد كتابة المصفوفة الموسعة لها، وذلك باستخدام بعض العمليات السطرية الأولية لاختصار المصفوفة الموسعة إلى شكل مدرج.

$$2x_2 + 3x_3 = 8$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -5$$

الحل:

نكتب المصفوفة الموسعة لجملة المعادلات:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r_1' = r_3 \\ r_3' = r_1 \end{pmatrix} \quad or \quad r_1 \leftrightarrow r_3$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \qquad (r_2' = r_2 - 2r_1)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \qquad \left(r_2' = \frac{1}{5}r_2\right)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (r_3' = r_3 - 2r_2)$$

ومنه يمكن التعبير عن المصفوفة الأخيرة، باستخدام المعادلات الخطية، على النحو التالي :

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -5$$

$$x_2 + x_3 = 3$$

$$x_3 = 2$$

وبالتعويض الإرجاعي نجد أنّ:

$x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ و $x_3 = 2$

<u>مبرهنة:</u>

تكون المصفوفتان A و B متكافئتين إذا وفقط إذا كان يمكن اختزالهما إلى نفس الشكل المدرج السطري row echelon form.

<u>جملة المعادلات الخطية المتوافقة وغير المتوافقة:</u>

Compatible and incompatible sets of Equations

ليس من الضروري أن يكون لأي مجموعة من المعادلات الخطية حلاً مشتركاً. فمثلاً المعادلتان الآتيتان :

$x + y = 1$ و $x + y = 2$

ليس لهما حل مشترك.

في حين نجد أن المعادلتين:

$2x + 4y = 2$ و $x + 2y = 1$

لهما عدد لانهائي من الحلول.

فإذا كانت $y = \lambda$ (أي عدد) فإنّ $x = 1 - 2\lambda$ من أجل أي عدد حقيقي λ .

من أجل حل معادلتين بمجهولين من السهولة إيجاد حلهما الوحيد، في حين من أجل أكثر من معادلتين ليس الأمر بهذا الوضوح.

فمثلاً إذا أخذنا مجموعة المعادلات الخطية التالية:

$$x + y - z = 3$$

$$3x - y + 3z = 5$$

$$x - y + 2z = 2$$

لنحسب معين الأمثال للمجاهيل: z و y و x :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r_2' = r_2 + r_1 \\ r_3' = r_3 + r_1 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ما هي الخطوات التي قمنا بها؟ ولماذا؟

ومنه نجد أن قاعدة كرامر لا تصلح، على الرغم من أنه يمكن أن يكون هناك حل.

ولماذا لا تصلح؟

لنستخدم طريقة غاوص لأنها أسرع، لذلك نكتب المصفوفة الموسعة لمجموعة المعادلات:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r_2' = r_2 - 3r_1 \\ r_3' = r_3 - r_1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(r_3' = r_3 - \frac{1}{2} r_2 \right)$$

وهذا هو الشكل المدرج لمجموعة المعادلات السابقة. نلاحظ أن السطر الثالث لا يمكن أن يتحقق...لماذا؟ لذلك ليس لهذه المعادلات حل.

مثال:

لنأخذ مجموعة المعادلات:

$$x + y - z = 1$$

$$3x - y + 3z = 5$$

$$x - y + 2z = 2$$

لنكتب المصفوفة الموسعة (طريقة غاوص):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r_2' = r_2 - 3r_1 \\ r_3' = r_3 - r_1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left(r_3' = r_3 - \frac{1}{2} r_2\right)$$

نلاحظ أن السطر الثالث متسق.. لماذا؟

ومن السطر الثاني نجد أن :

$$-4y + 6z = 2$$

ومنه :

$$y = -\frac{1}{4}[2 - 6z]$$

ومن السطر الأول نجد أن :

$$x = 1 - y + z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} z$$

ومنه z يمكن أن تأخذ أي قيمة، ولتكن، λ ، مثلاً . لذلك فإنّ مجموعة الحل هي:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 - 1/2\,\lambda \\ -1/2 + 3/2\,\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

من أجل أي قيمة لـ λ.

لذلك هناك عدد لا نهائي من الحلول، وفقاً لقيمة λ.

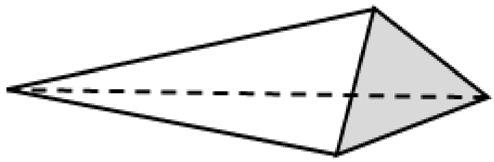
المعنى الهندسي :

في الفضاء ثلاثي الأبعاد (الإقليدي) يمكن أن نرى لماذا جملة من المعادلات يمكن أن يكون لها حل وحيد ، أو عدد لا نهائي من الحلول ، أو ليس لهل حل . وذلك لأن أي معادلة على النحو :

$$ax + by + cz = d$$

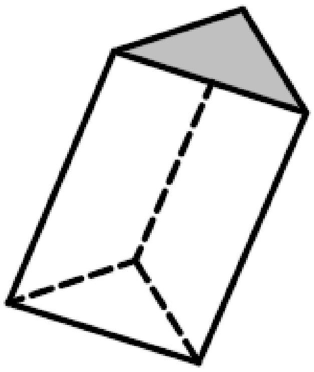
تمثل مستو في الفضاء الإقليدي R^3, حيث a و b و c ثوابت. أي أن المعادلات الثلاث تمثل ثلاثة مستويات ، وإحداثيات أي نقطة من نقاط تقاطع المستويات تمثل حلاً مشتركاً للمعادلات .

حل وحيد:



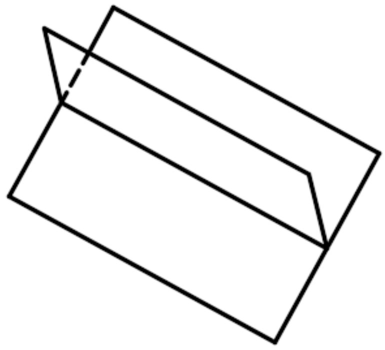
الشكل يمثل حل وحيد للمعادلات

ليس له حل :



المعادلات ليس لها حل مشترك

مستقيم الحل : (عدد لا نهائي من الحلول)



<u>تمرين :</u>

عين مجموعة قيم a و b التي تجعل المعادلات :

$$x - 2y + 3z = 2$$
$$2x - y + 2z = 3$$
$$x + y + az = b$$

١. لها حل وحيد.

٢. ليس لها حل.

٣. لها عدد لا نهائي من الحلول .

الحل:

نكتب المصفوفة الموسعة ثم نختصرها إلى شكل مدرج:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & a-3 & b-2 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_2' = r_2 - 2r_1 \\ r_3' = r_3 - r_1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & b-1 \end{bmatrix} \quad (r_3' = r_3 - r_2)$$

١. إذا كانت $a \neq -1$، فإنّ المجهول z له الحل الوحيد:

$$z = \frac{b-1}{a+1}$$

ويمكن عندها إيجاد x و y بالتعويض الإرجاعي. أوجد ذلك؟

٢. إذا كانت $a=-1$ و $b\neq 1$ ، فإنّ السطر الثالث غير متسق....لماذا؟ ومن ثم لا يوجد حل للمعادلات .

٣. إذا كان $a=-1$ و $b=1$ فإنّ السطر الثالث يقتضي $z=\lambda$ من أجل أي عدد λ .

ويمكن عندها حساب x و y بالتعويض الإرجاعي.

ملاحظة :

يوضح هذا المثال ميزة طريقة غاوص على طريقة كرامر

(formula – based method of Cramer) .

وطريقة غاوص يمكن استخدامها حتى ولو كان عدد المعادلات يختلف عن عدد المجاهيل .

مثال:

ابحث عن حلول المعادلات :

$$x+y-z=1$$

$$3x-y+3z=5$$

$$x-y+2z=2$$

$$x+z=3$$

لدينا ثلاثة مجاهيل وأربع معادلات. لاحظ أن عدد المجاهيل أقل من عدد المعادلات.

نكتب المصفوفة الموسعة للمعادلات:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_2' = r_2 - 3r_1 \\ r_3' = r_3 - r_1 \\ r_4' = r_4 - r_1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_3' = r_3 - \frac{1}{2} r_2 \\ r_4' = r_4 - \frac{1}{4} r_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (r_3 \leftrightarrow r_4)$$

نلاحظ أن السطر الرابع متسق، والسطر الثالث يقتضي $z = 3$.

وبالتعويض الإرجاعي نجد أن: $y = 4$ و $x = 0$

ملاحظة:

يمكن أن يكون عدد المتغيرات (المجاهيل) أكبر من عدد المعادلات كما في المثال التالي:

بيّن أنّ المعادلات التالية غير متسقة:

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$

$$x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 - x_4 = 4$$

$$3x_1 - 3\,x_2 + 7\,x_3 = 7$$

الحل:

نكتب المصفوفة الموسعة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 7 & 0 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_2' = r_2 - r_1 \\ r_3' = r_3 - 3r_1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (r_3' = r_3 - 2r_2)$$

نظراً إلى أنّ $-2 \neq 0$ في السطر الأخير، لذلك فإن هذا السطر غير متسق، ومن ثم المعادلات غير متوافقة. أي ليس لجملة المعادلات حل.