جامعة الجزيرة الخاصة
كلية الهندسة
قسم المعلوماتية

أملية الرياضيات (1)

إعداد الدكتور محمود باكير

العام الدراسي 2019-2020

المرجع:

" Mathematical Technique ", D .W. Jordan & P. Smith, Oxford
"University Press, 2002.

أو الطبعات الأحدث.

متوفر نسخة ألكترونية منه pdf على الشبكة العالمية للمعلومات (الإنترنت)

حلول مسائل الكتاب موجودة في الموقع:

**** /uk/ booksites/ engineeringwww.oup.com

****Mathematica Programs :

وهو نظام حاسوبي تقني حديث يُستخدم لإنجاز العمليات الرياضية باستخدام الحاسوب. نجد ما يتعلق في الكتاب من هذا النظام في الموقع:

/depts /ma / www.keele.ac.uk

جبر المصفوفات Matrix algebra

تعريف المصفوفة وترميزها:

تعرّف المصفوفة على أنها تشكيلة من الرموز تخضع لعمليات جبرية معينة ، ونستخدم عادة حروفاً كبيرة للإشارة إليها.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة ذات ثلاثة أسطر *rows* و ثلاثة أعمدة *columns*.

تسمى مكوناتها عناصر *elements* ، أو مداخل المصفوفة.

مرتبة *order* المصفوفة A هي 3×3.

المصفوفة التي من المرتبة $m\times n$ تحوي m سطراً و n عموداً.

وعموماً تكتب المصفوفة على النحو التالي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}=\left[a_{ij}\right] \quad :(1\le i\le m \text{ و } 1\le j\le n)$$

يرمز a_{ij} إلى العنصر الواقع في السطر i والعمود j من المصفوفة A .

كما يمكن أن تكتب على النحو التالي:

$$A=\left[a_{ij} : i=1\,.\,2\,.\,.\,m\,; \quad j=1\,.\,2\,.\,.\,n\right]$$

أو ببساطة، تكتب على النحو التالي :

$$A=\left[a_{ij}\right]$$

حالات خاصة:

- المصفوفة من المرتبة 1×1 هي عدد ، مثلاً $-7=[-7]$.
- المصفوفات التي تتألف إما من سطر واحد، أو من عمود واحد تسمى شعاعاً vector.

ومنه المصفوفة $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ تسمى شعاعاً سطرياً row vector ، و $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ شعاعاً عمودياً column vector.

- المصفوفة التي يكون فيها عدد الأعمدة يساوي عدد الأسطر تسمى مصفوفة مربعة square matrix ، أي عندما يكون : $m = n$.

وإذا كان $m \neq n$ تسمى مصفوفة مستطيلة rectangular.

قواعد جبر المصفوفات:Rules of matrix algebra

من المعروف أنّ قواعد جبر المصفوفات تعود جذورها إلى تمثيل المعادلات الخطية والتحويلات (التطبيقات) الخطية. لذلك الآن سنذكرها كقواعد فقط.

1.التساوي:

يعرِّف التساوي بين مصفوفتين فقط عندما يكون لهما المرتبة نفسها، أي عندما يكون لهما العدد نفسه من الأسطر والأعمدة. وهذا الشرط اللازم غير الكافي لتساويهما.
والشرط الكافي للتساوي هو أن تكون العناصر المتناظرة متساوية. ومنه :
إذا كان لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

فإنّ : $A = B$ إذا وفقط إذا كان :

$$a = e \text{ و } b = f \text{ و } c = g \text{ و } d = h$$

وعموماً، إذا كانت $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ ومرتبة كل منهما $m \times n$ فإنّ:

$$a_{ij} = b_{ij} \;\; iff \;\; A = B$$

من أجل كل $i = 1\ .2 \ldots\ m \quad ; \quad j = 1\ .2 \ldots\ n$

مثال :

حل المعادلة المصفوفاتية التالية: $A = B$ وذلك عندما:

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & x^2 - y & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

من تعريف التساوي نجد أن :

$$x = 1 \quad \text{و} \quad x^2 - y = 2$$

وبالحل المشترك نجد أن:

$$y = -1$$

2.الضرب بثابت:

إذا كان k ثابتاً عددياً فإننا نعرف المصفوفة: kA على أنها المصفوفة التي يكون كل عنصر منها هو حاصل ضرب عناصر A بـ k.

مثال:

إذا كانت:

$$k = 5 \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

فإنّ :

$$kA = \begin{bmatrix} 5 & 25 & -10 \\ 0 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$

كذلك يمكن تحليل المصفوفة B على النحو التالي:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 25 & 30 \\ 15 & 10 & 60 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

3.المصفوفة الصفرية :

وهي المصفوفة التي كل يكون كل عناصرها أصفاراً، وتكتب على النحو : $A = 0$.

4.جمع المصفوفات وطرحها:

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ لهما المرتبة ذاتها $m \times n$ ، فإنّ حاصل جمعها يعرّف:

$$C = A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

مثال:

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

أوجد كل من المصفوفات التالية: $A + 2B$ و $B + A$ و $A + B$

ملاحظة:

نستنتج من ذلك أنّ جمع المصفوفات تبديلي لأنّ:

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$$

ومنه:

$$A + B = B + A$$

طرح المصفوفات :

نعرف حاصل طرح المصفوفتين A و B على النحو التالي:

$$A - B = A + (-1)B$$

لماذا نستطيع ذلك؟ أو لماذا طرح المصفوفات معرفاً؟

مثال:

أوجد $A - B$ و $2A - 3B$ ، حيث A و B كما في المثال السابق.

الخاصة التجميعية :

$$A + (B + C\ ) = (A + B) + C$$

لماذا صحيحة هذه الخاصة؟

كذلك فإن :

$$k(A + B) = kA + kB$$

برّر ذلك؟

5.ضرب المصفوفات :

جداء المصفوفتين A و B (يكتب بالترتيب AB) يعرّف فقط إذا كان عدد الأعمدة في A يساوي عدد أسطر B . وفي خلاف ذلك فإن الضرب غير معرف (موجود).
وإذا كان الجداء AB معرفاً فليس من الضروري أن يكون الجداء BA معرفاً. والأكثر من ذلك، فإن وجود AB لا يقتضي بالضرورة أن يكون : $AB = BA$. أي أن ضرب المصفوفات ليس تبديلياً بالضرورة.

لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$ ، أي أنها من المرتبة 1×3

و $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$ ، أي أنها من المرتبة 3×1.

فإنّ حاصل الجداء يساوي:

$$AB = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + \quad a_{12}b_{21} + \quad a_{13}b_{31}]$$

وهي مصفوفة من المرتبة 1×1. لماذا؟

لنفرض الآن أنّ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×2

عدد الأعمدة في A يساوي عدد أسطر B =؟

2×2 مرتبتها $\qquad AB = C$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{bmatrix} = C$$

وهي من المرتبة 2×2.

<u>مثال :</u>

إذا كان:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

فإنّ:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$$

<u>مثال :</u>

إذا كانت A من المرتبة 4×5 و B من المرتبة 5×4 و C من المرتبة 4×6.

أي من الجداءات المصفوفاتية التالية معرّفة؟ ولماذا؟ ما هي مرتبة المصفوفة الناتجة في كل من الجداءات التالية؟

AB و BA و AC و CB و $(AB)C$ و $(CB)A$

<u>مثال :</u>

إذا كانت:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

احسب كلاً من: AB و BA. ماذا تلاحظ؟

$$AB = 0 \quad \text{و} \quad BA = \begin{bmatrix} 7 & -5 & -2 \\ 7 & -5 & -2 \\ 7 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

من الممكن أن يكون $AB = 0$ على الرغم من أنّ كلاً منهما لا يساوي الصفر.

لذلك نستنتج أنه:

إذا كان لدينا: $A(B - C) = 0$ و $A \neq 0$ فإن ذلك لا يقتضي بالضرورة أن $B = C$. مع افتراض أن الضرب معرف. لماذا؟

بماذا يختلف ذلك عن الإطار العددي ؟

خواص الضرب:

1. الخاصة التوزيعية : $A(B + C) = AB + AC$
2. الخاصة التجميعية : $A(BC) = (AB)C$

بشرط أنّ يكون الضرب معرّفاً.

مصفوفات خاصة :

هناك خواص خاصة بالمصفوفات المربعة، وأخرى خاصة بالمصفوفات المستطيلة .

تعريف:

منقول transpose مصفوفة هو المصفوفة التي نحصل عليها من هذه المصفوفة بعد استبدال الأعمدة بالأسطر، والأسطر بالأعمدة. ونرمز له بـ A^T .

فإذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

فإنّ:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

لذلك إذا كانت A من المرتبة 2×3 فإن A^T من المرتبة 3×2.

مثال:

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

أوجد منقول كل من: A و B و $A + B^T$ و AB ، BA .

تحقق من أنّ : $(AB)^T = B^T A^T$.

1.خواص المنقول :

إذا كان كل من $A + B$ و AB معرفاً من أجل المصفوفة A و B فإنّ :

$$a)\ \ (A + B)^T = A^T + B^T$$
$$b)\ \ (AB)^T = B^T A^T$$

2-المصفوفات المتناظرة والمتناظرة – المتخالفة:

نقول عن المصفوفة المربعة A إنها متناظرة إذا كان: $A = A^T$. وهذا يكافئ أن:

$a_{ij} = a_{ji}$ من أجل كل عناصر المصفوفة A ، حيث $A = [a_{ij}]$.

مثال :

إذا كان لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

نجد أنها متناظرة . لماذا؟

نلاحظ في المصفوفة المتناظرة أن العناصر تكون متناظرة بالنسبة إلى القطر الرئيسي leading diagonal .

ونقول عن المصفوفة المربعة A التي فيها $A = -A^T$ إنها متناظرة – متخالفة– skew symmetric .

تمرين:

أثبت أنه إذا كانت A أي مصفوفة مربعة ، فإنّ: $A + A^T$ متناظرة، وأن $A - A^T$ متناظرة – متخالفة.

الحل: اعتماداً على التعريف.

ملاحظة: نلاحظ أن عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة المتناظرة – المتخالفة يجب أن تكون أصفاراً، لأنّه :

عندها يكون : $A = -A^T$ (تعريفاً)، أي أنّ $a_{ij} = -a_{ji}$ من أجل كل قيم $(1 \le j \le n$ و $1 \le i \le m)$. ومنه $a_{ii} = -a_{ii}$ (عناصر القطر الرئيسي) عندما $i = j$.

إذاً: $2a_{ii} = 0$ ومنه $a_{ii} = 0$.

مثال : لنأخذ المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$ نجد أنها متناظرة – متخالفة.

3.شعاع سطر وشعاع عمود Row and column vectors:

الشعاع سطر يكون على النحو التالي:

$$a = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$$

والشعاع عمود يكون على النحو التالي:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

ومنقول الشعاع سطر هو شعاع عمود، والعكس صحيح أيضاً.

مثال :

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad و \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad و \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

أوجد مجموعة المعادلات الجبرية من أجل z و y و x الممثلة بالمعادلة المصفوفاتية :

$AX = d$.

الحل :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وبعد ضرب المصفوفتين الواقعتين على يمين المساواة نجد أن :

$$\begin{bmatrix} x - y + 2z \\ 3x + y - 4z \\ -x + 2y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ومن تساوي المصفوفتين نجد أن:

$$x - y + 2z = 2$$
$$3x + y - 4z = 1$$
$$-x + 2y + z = -1$$

4.المصفوفة القطرية :Diagonal matrix

المصفوفة المربعة التي يكون جميع عناصرها، ما عدا عناصر القطر الرئيسي، تساوي أصفاراً تسمى مصفوفة قطرية. أي إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من المرتبة $n \times n$ ، فإنها قطرية إذا كان $a_{ij} = 0$ من أجل كل $i \neq j$.

مثال : لنأخذ المصفوفة القطرية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

من الواضح أنها متناظرة .

إذا كانت B و A قطريتين من المرتبة ذاتها ، فإنّ $A + B$ و AB كل منهما قطرية.

تحقق من ذلك ؟

5.المصفوفة المحايدة (الحيادية): Identity matrix

المصفوفة القطرية التي فيها كل عناصر القطر الرئيسي تساوي 1 تسمى محايدة أو حيادية unit matrix.

أي هي من الشكل :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A \quad ،$$

$$I_3 A = A$$

ليس من الضروري أن تكون A قطرية: بشرط أن يكون الضرب معرفاً ، فإنّ

$IA = A \quad \& \quad AI = A$ من أجل المصفوفة الحيادية المناسبة في كل حالة .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$AI_3 = A$$

6.قوى المصفوفات : Powers of matrix

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$ فإننا نعرّف:

$AA = A^2$ و $AA^2 = A^3$ و ... و $AA^n = A^{n+1}$

لماذا نشترط أن تكون A مصفوفة مربعة؟

مثال :

إذا كانت :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فإنّ:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^4 = BB^3 \ = \cdots$$

إذا كانت A قطرية:

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

فإنّ :

$$A^2 = \begin{bmatrix} {d_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {d_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {d_3}^2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^3 = \begin{bmatrix} {d_1}^3 & 0 & 0 \\ 0 & {d_2}^3 & 0 \\ 0 & 0 & {d_3}^3 \end{bmatrix}$$

وعلى نحو خاص فإن: $I_m^n = I_m$ من أجل كل الأعداد الصحيحة الموجبة n.

مقلوب مصفوفة (المصفوفة المقلوب) : The inverse matrix

إذا كانت B و A مصفوفتين قطريتين ، مرتبتهما $n \times n$ وكانا يحققان :

$$AB = BA = I_n$$

نقول عن B إنها مقلوب A ، أو إن A مقلوب B . وهو وحيد .

ونكتب ذلك على النحو: $B = A^{-1}$، وليس $B = I/A$. كذلك فإن : $A = B^{-1}$.

وإذا كان لدينا المصفوفات الثلاث التالية بحيث أن : $AB = C$ ، وكان المقلوب لـ B موجوداً، فإنه يمكن أن نحل هذه المعادلة، وأن نجد A ، حيث $A = CB^{-1}$.

كيف نجد المقلوب ؟ وهل هو موجود دوماً ؟

لندرس أولاً حالة مصفوفة من المرتبة 2×2 ولننظر إلى المعادلة المصفوفاتية:

$AX = d$،

حيث:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ و } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ و } d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

أو (بعد ضرب المصفوفتين، ثم التساوي) نجد أن :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = d_1 \quad \text{و} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = d_2 \quad *$$

بالحل المشترك نجد أن :

$$x_1 = \frac{a_{22}d_1 - a_{12}d_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-a_{21}d_1 + a_{11}d_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}،$$

لنعبر الآن عن حل المعادلة * على شكل مصفوفة :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22}d_1 - a_{12}d_2 \\ -a_{21}d_1 + a_{11}d_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = Cd$$

حيث:

$$C = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

وإذا ضربنا $AX = d$ بـ A^{-1} , بافتراض أنه موجود، نجد أنّ :

$$A^{-1}AX = I_2X = X = A^{-1}d \,.$$

ومنه : $A^{-1} = C$. أي أن مقلوب المصفوفة A يعطى بالعلاقة:

$$A^{-1} = C = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

قاعدة:

إيجاد مقلوب مصفوفة من المرتبة 2×2.

إذا كان $\det A \neq 0$، فإنه يمكن إيجاد مقلوب A ، وذلك بتبديل عنصري القطر ببعضهما ، ثم نغير إشارة العنصرين الآخرين. وأخيراً نقسم على $\det A$.

نسمي العدد: $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ معين A (محدد) determinant A .

ويكتب على النحو :

$$\det A = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

نلاحظ أن المعين هو **تابع** للمصفوفة المعنية ، وهو عدد وليس مصفوفة .

إذا كان $\det A = 0$ *فإنه* ليس لها مقلوب ، ونقول عندها إنها شاذة Singular *.*

وفي خلاف ذلك نقول إنها غير شاذة non-singular *.*

مثال:

بين فيما إذا كانت A شاذة أم لا، ثم أوجد مقلوبها إن لم تكن شاذة .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$\det A = det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0$$ ليست شاذة .

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال :

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

أوجد A^{-1} و B^{-1} و $(AB)^{-1}$.

الحل :

$$\det A = 7 \quad \text{و} \quad \det B = -3$$

ومنه:

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det(AB) = -21$$

$$(AB)^{-1} = -\frac{1}{21}\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنّ:

$$B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{21}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{21}\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = (AB)^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ملاحظة:

إيجاد مقلوب المصفوفة من المرتبة 3×3 ستدرس في فصل قادم .

المعينات Determinants

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

فإنّ معين المصفوفة A يعرف على النحو التالي:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

أحياناً يستخدم الرمز $|A|$ لمعين A .

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فإن معينها يعرف على النحو التالي:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

يسمى هذا " المنشور بالنسبة للسطر الأول " ، ويسمى الحد المرتبط بـ a_{11} ، أي:

$$c_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

العامل المرافق cofactor لـ a_{11} . ونحصل على العامل المرافق لعنصر ما من A بحذف السطر والعمود الواقع فيهما هذا العنصر ، ونكتب معين العناصر المتبقية (المصفوفة 2×2).

والعامل المرافق لـكل من : a_{12} و a_{13} هما :

$$c_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad c_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

وبالطريقة نفسها نعرّف العوامل المرافقة لعناصر السطر الثاني والثالث :

c_{21}، c_{22}، c_{23}، c_{33}، c_{32}، c_{31}. وتكون إشارات العوامل المرافقة على النحو التالي:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

أي أن الإشارة لـ c_{ij} هي + إذا كان $i+j$ زوجي ، و- إذا كان $i+j$ فردي ، ويعبّر عنه على النحو التالي: $(-1)^{i+j}$.

مثال :

إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

أوجد $\det A$ بنشره بالنسبة إلى السطر الأول. ثم أوجد العوامل المرافقة: C_{21} و C_{22} و C_{23} لعناصر السطر الثاني. ثم أوجد: C_{31} و C_{32} و C_{33} بالنسبة للسطر الثالث.

الحل :

$$\det A = 1\times\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}$$

$$C_{21}=-\begin{vmatrix}5 & 0\\ 3 & 4\end{vmatrix} \text{ و } C_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix} \text{ و } C_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 5\\ 0 & 3\end{vmatrix}$$

$$C_{31}=\begin{vmatrix}5 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} \text{ و } C_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix} \text{ و } C_{33}=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}$$

مثال :

احسب المعين:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 0 & K\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}$$

ثم أحسب قيمة K التي تجعل المعين = 0.

خواص المعينات:

سندرس خواص المعينات في حالة المرتبة 3×3 . وهذه الخواص يمكن تعميمها بسهولة إلى مرتبة أكبر من ذلك.

١- $\det A=\det A^T$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \cdots\cdots\cdots = \det A$$

مثال :

أحسب:

$$\det A^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} \qquad \text{ثم} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

ماذا تلاحظ؟

٢- إذا ضرب أي عمود (أو سطر) من مصفوفة A بالعدد k (أي إذا ضربت كل عناصره بـ k)، فإنّ معين هذه المصفوفة يساوي $k \det A$.

لاحظ أن هذه الخاصة تختلف عن ضرب المصفوفة بثابت عددي .

وهذه القاعدة واضحة ، نظراً إلى أنّ عنصراً واحداً من كل سطر وعمود يظهر في أي حد من حدود نشر المعين.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \cdots\cdots\cdots = k\, detA$$

لو كانت $K = 0$ في هذه النتيجة (أي إذا كانت كل عناصر أي سطر أو عمود = *0*) فإنّ المعين يجب أن يكون = *0*. نستنتج من ذلك أنّ المعين الذي أحد أسطره أو أعمدته أصفاراً فإنه يساوي الصفر.

مثال:

أحسب المعين:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 99 & 1 \\ 2 & 33 & -2 \\ 3 & 55 & 1 \end{vmatrix}$$

نلاحظ أن العمود الثاني منه يحوي عاملاً مشتركاً *11*. ومنه:

$$\Delta = 11 \times \begin{vmatrix} -1 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 11 \times \left((-1) \times \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 9 \times \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right)$$

٣- <u>إذا كانت المصفوفة B نحصل عليها من A باستبدال سطر (أو عمود) بآخرمن A</u> ، فإنّ:
. $\det B = -\det A$

لنفرض أنّ:

$$B = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

وذلك باستبدال السطر الأول مع السطر الثالث.

فإنّه بعد النشر نجد أن :

$$\det B = \cdots\cdots\cdots = -\det A$$

<u>تمرين :</u>

احسب المعين التالي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل :

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

وذلك بالاستفادة من أن : $\det A = \det A^T$ ومن القاعدة ٣.

<u>٤ - النشر بالنسبة إلي أي سطر أو عمود:</u>

إذا كان لدينا المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

لننشر معين المصفوفة بالنسبة إلى السطر الأول:

$$\det \mathrm{A} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

وهذا يساوي نشر المعين بالنسبة للسطر الثالث.

النتيجة :

أي أنه يمكن بيان أنّ نشر المعين هو ذاته بالنسبة إلى أي سطر أو عمود .

<u>مثال :</u>

أوجد $\det A$ ، حيث:

$$det\ \ A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

نظراً إلى أنّ العمود الثالث يحوي ثلاثة أصفار ننشر بالنسبة إليه

$$\det A = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

ننشر بالنسبة إلى السطر الثاني :

$$= 2\left(-1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = 28$$

<u>٥- إذا تساوى سطران أوعمودان من A فإن $\det A = 0$.</u>

وهي نتيجة مباشرة للقاعدة ٣.

وذلك لأنه إذا استبدلنا السطرين (أو العمودين) المتساويين ببعضهما، فإنّ المعين يبدو نفسه ، مع أنّ قيمته تساوي $\det A-$ من الخاصة ٣. ومن ثم فإن : $\det A = -\det A.$. ومنه $\det A = 0$ وفق خاصة الضرب بصفر.

ونتيجة من القاعدة الثانية نجد أنه إذا كانت عناصر سطرين (أو عمودين) متناسبة ، فإنّ قيمة المعين= 0. لماذا؟

مثال:

احسب قيمة المعين:

$$\begin{vmatrix} 99 & 18 & 63 \\ 11 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 11 & 2 & 7 \\ 11 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

وذلك بالاستفادة من القاعدة ٢.

٦- إذا كانت عناصر أحد الأسطر (أو الأعمدة) في معين مكونة من مجموع من الحدود (كما في المعين الواقع على يسار المساواة) ، فإنّ هذا المعين يساوي حاصل جمع المعينات على يمين المساواة .

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & a'_1 + a'_2 + a'_3 \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a'_1 \\ b & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a'_2 \\ b & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a'_3 \\ b & b' \end{vmatrix}$$

يمكن التحقق من ذلك بنشر الطرفين .

٧- لا تتغير قيمة معين إذا أضفنا إلى عناصر أحد أسطره (أو أعمدته) العناصر المقابلة لها في سطر آخر (أو عمود) مضروبة بعدد ما.

أي إذا كانت المصفوفة B حصلنا عليها من Aعلى ذلك النحو فإنّ : $\det B = \det A$.

أي أنّ أي عدد من هذا النوع من العمليات على الأسطر (أو الأعمدة) ليس لها تأثير على قيمة $\det A$.

لنفرض أنّ $\det B$ حصلنا عليه من $\det A$ على النحو التالي:

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + Ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + ka_{13} \end{vmatrix}$$

أي أن قيمة المعين لم تتغير.

٨- إذا كانت A و B مصفوفتين **مربعتين** من المرتبة نفسها فإنّ :

$$\det AB = \det A \det B$$