((تمارين))

تمرين (1) :

إذا كانت مصفوفة A تساوي:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد مصفوفة C بحيث يكون $A + C = I_3$ ، استنتج أنّ $AC = CA$ ، أوجد المصفوفة $A^2 + C^2$.

تمرين (2):

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

اكتب مجموعة المعادلات المعرّفة بالمعادلة $Ax = d$ ، ثم أثبت أننا نحصل على نفس المجموعة من المعادلات من $x^T A^T = d^T$. ماذا تساوي $(x^T A^T = d^T)^T$ ؟

تمرين (3):

أوجد حل جملة المعادلات الجبرية التالية وذلك بكتابة المعادلة المصفوفاتية الموافقة لها:

$$3x_1 - x_2 = 5$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15$$

تمرين (4):

استخدم طريقة كرامر ، ثم طريقة غوص في حل جملة المعادلات التالية:

$$2x + y - z = -1$$

$$x + y + z = 2$$

$$3x + 2y + z = 3$$

تمرين (5):

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

أثبت أنّ $AB \neq BA$. ماذا تستنتج؟

تمرين (6):

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

أثبت أنّ $A^2 - 4A + 3I_3 = 0$

تمرين (7):

حل جملة المعادلات الخطية بطريقة غاوص:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

تمرين (8):

عيّن k لتكون لجملة المعادلات عدداً لا نهائياً من الحلول:

$$x + y + kz = 0$$

$$x + ky + z = 0$$

$$kx + y + z = 0$$

تمرين (9):

إذا كانت النقاط $P(1,1,0)$, $Q(1,1,1)$, $R\ (1,2,1)$ ثلاثة رؤوس من متوازي الأضلاع $PQRS$ ، استخدم الأشعة في إيجاد احداثيات الرأس الرابع S ، وفي إيجاد احداثيات منتصف PS .

تمرين(10):

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} x & y & 12 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة x , y إذا كان $2A - B = C$.

تمرين (11):

احسب مقلوب المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

تمرين (12):

إذا كانت المصفوفة المربعة A من المرتبة n، وتحقق $A^2 = A$ و A لا تساوي المصفوفة الحيادية I_n.

أثبت أنَّ: $\det A = 0$.

تمرين (13):

بدون نشر معيني المصفوفتين التاليتين بيّن لماذا المعينان يساويان الصفر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ a-b & b-c & c-a \end{bmatrix}$$

تمرين (14):

حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقتين: أولاً طريقة كرامر ثمَّ بطريقة غاوص

$$2x + y - z = -1$$

$$x + y + z = 2$$

$$3x + 2y + z = 3$$

تمرين (15):

إذا كانت الأشعة $a = (1,0,-1)$, $b = (-2,-1,0)$, $c = (-3\ ,2\ ,4)$ احسب الشعاع المعطى بالعلاقة : $3a + 2b - 3c$

تمرين (16):

إذا كانت النقاط $ABCD$ تمثل رؤوساً لمتوازي أضلاع، حيثُ أنَّ النقاط تعطى كما يلي:

$$A = (1,1,0)\ \ ,\ \ B = (1,1,1)\ \ ,\ \ \ \ C = (1,2,1)$$

والمطلوب:

١) أوجد النقطة D.
٢) أوجد منتصف القطر AC.

تمرين (17):

إذا كان $\vec{u} = (2,0,-2)$, $\vec{v} = (-1,-1,0)$ شعاعين في الفراغ، المطلوب:

١. أحسب كلاً مما يلي:

$$|\vec{u}|\ ,\quad |\vec{v}|\ ,\quad \vec{u}.\vec{v}\ ,\quad \vec{u}\times\vec{v}\ ,\quad |\vec{u}-\vec{v}|$$

٢. احسب الزاوية بين الشعاعين $\vec{u}\ ,\vec{v}$.
٣. ما هي مساحة المثلث المنشأ من الشعاعين $\vec{u}\ ,\vec{v}$.

تمرين (18):

حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقتين: أولاً بكتابتها على النحو المصفوفاتي $AX = d$ ثم حلها بطريقة كرامر.

$$x + 2y + 3z = 0$$

$$-2x - 4y - 5z = 1$$

$$3x + 5y + 6z = 1$$

تمرين (19):

عين مجموعة قيم a, b التي تجعل المعادلات:

$$x + y - z = 2$$

$$2x + 3y + z = 3$$

$$5x + 7y + az = b$$

1)لها حل وحيد.

2)ليس لها حل.

3)لها عدد لا نهائي من الحلول.

تمرين (20):

إذا كانت:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad , \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أثبت أنّ $BA \neq AB$.

تمرين (21):

أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

تمرين (22):

أحسب $\det adj\ A$ حيثُ:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

هل يمكن حساب $adj \det A$؟ ولماذا؟

تمرين (23):

تأكد من أنَّ B مقلوب A حيثُ:

$$B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\ ,\ A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

هل هذا يعني أنَّ A مقلوب B ؟ برر إجابتك؟

تمرين (24):

أثبت فيما إذا كانت الأشعة $OA=(1,1,2)$, $OB=(1,1,1)$, $OC=(5,5,7)$ تقع جميعها في مستو واحد أم لا.

تمرين (25):

أثبت أنّ النقاط $A\ (1,2,-1)$, $B\ (3,3,-2)$, $C\ (-3,0,1)$ تقع على استقامة واحدة (على نفس المستقيم) وذلك باستخدام الشعاعين AB , AC ، أو غيرهما من الأشعة.

تمرين (26):

احسب قيمة المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 2 & 3 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 2\end{vmatrix}$$

تمرين (27):

هل الأشعة التالية تقع في مستو واحد؟ أثبت ذلك.

$$a = (1,5,-2)\ ; b = (3,-1,0)\ ; c = (5,9,-4)$$

تمرين (28):

احسب الزاوية بين الشعاعين $a(2,6,-5), b(-1,-8,6)$

تمرين (29):

إذا كانت:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفات $2A - 3B\ \ , A - B\ \ , A + B$

تمرين (30):

حل جملة المعادلات الخطية بطريقتين: أولاً بطريقة كتابتها على النحو المصفوفاتي $AX = d$ ،ثم بطريقة كرامر:

$$x - z = 1$$

$$2x + y - z = 1$$

$$x + 2y + 5z = 2$$

تمرين (31):

أوجد حل جملة المعادلات التالية:

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 2$$

تمرين (32):

أوجد حل جملة المعادلات التالية بطريقة غاوص:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 1$$

تمرين (33):

أوجد حل جملة المعادلات التالية:

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 - 2x_3 = 1$$
$$x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 2$$

تمرين (34):

أوجد حل جملة المعادلات التالية بطريقة غاوص:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = -1$$

تمرين (35):

إذا كانت المصفوفة المربعة A من المرتبة n و تحقق $A^2 = A$ و A لا تساوي المصفوفة الحيادية I_n.

أثبت أنّ $\det A = 0$.

تمرين (36):

هل مقلوب المصفوفات التالية موجوداً؟ وفي حال وجوده أوجده.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرين (37):

إذا كانت المصفوفة A تكتب على النحو: $A = [a_{ij}]$ من المرتبة $n \times n$.

بيّن أنّ $A + A^T$ متناظرة، وأنّ $A - A^T$ متناظرة – متخالفة.

تمرين (38):

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$ ، أوجد A^2 ، أوجد العلاقة بين a , b , c التي تجعل $A^2 = I_3$.

تمرين (39):

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 2$$

تمرين (40):

إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد المصفوفة $-2A^2 + A - I$

حيث I المصفوفة الواحدية من المرتبة الثالثة.

تمرين (41):

إذا كانت:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

أوجد A^{-1} , B^{-1} , $(AB)^{-1}$.

هل يمكن حساب $(AB)^{-1}$ بطريقة أخرى ؟ ما هي في حال وجودها.

تمرين (42):

أوجد العددين x, y إذا كان $a + b = c$ حيثُ:

$$a = (1, x, 3) \quad , \quad b = (y, 0,2) \quad , \quad c = (-1,0,5)$$

تمرين (43):

أوجد العددين y, x إذا كانت العلاقة بين الشعاعين a و b على النحو التالي: $2b = a$ ، حيث $a = (4 \ , x \ , 8)$, $b = (y \ , 2 \ ,4)$. ثم استنتج أنّ $a \times b = 0$ باستخدام تعريف الجداء الشعاعي.

تمرين (44):

إذا كانت النقاط $P(2 \, , 1 \, , 3)$, $Q \ (2 \, , 3 \, , -1)$ عين الأشعة $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{PQ}$ ، ثم عين الزاوية بين $\overrightarrow{PQ}$ و المحور ox .

تمرين (45):

احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط $P(1 \, , 3 \, ,2)$, $Q(2 \, , -1 \, , 1)$, $R(-1 \, , 2 \, , 3)$.

تمرين (46):

احسب حجم متوازي السطوح الذي أحرفه الأشعة:

$$\vec{a} = (2, -3,4) \, , \vec{b} = (1,1, -1) \, , \vec{c} = (3, -1,2)$$

تمرين (47):

أوجد الزاوية بين الشعاعين التاليين في كل طلب على حدة في المجال 0 إلى 180° .

1) $\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}\ ,\quad \hat{\imath}+\hat{\jmath}$

2) $\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\hat{k}\ ,\quad \hat{\imath}+\hat{\jmath}$

تمرين (48):

أثبت أن النقاط $S(-4,4,4)$, $R(3,9,4)$, $Q(0,-1,-1)$, $P(4,5,1)$ تقع في مستو واحد.

((تمارين غير محلولة))

١- إذا كانت لدينا المصفوفتان التاليتان:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

والمطلوب: أوجد المصفوفات A^{-1} , $A.B$, $A-B$, $A+B$.

٢- إذا كانت $A\ (0,1,0)$, $B\ (2,1,-1)$, $c\ (1,0,2)$ أوجد الزاوية الحاصلة بين $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$.

٣- أوجد $2a-3b$ إذا كان $a=(1,2,1)$, $b=(2,1,2)$.

٤- أوجد $2a-3b$ إذا كان $a=(3,2,3)$, $b=(1,1,2)$ كيف تعرف أن $2a-3b$ يوازي المستوي oxy.

٥- أوجد $2a-3b$ إذا كان $a=(6,3,1)$, $b=(4,2,1)$ كيف تعرف أن $2a-3b$ يوازي المحور oz.

٦- أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{OA} = (1,1,2)$, $\overrightarrow{OB} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{OC} = (5,5,7)$
تقع جميعها في مستو واحد. هل هذا صحيح أيضاً من أجل

$$\overrightarrow{OA} = (a,a,p) \quad , \overrightarrow{OB} = (b,b,q) \quad , \overrightarrow{OC} = (c,c,r)$$

حيث a, b, c, p, q أي عدد.

٧- إذا كانت $P\ (1,1,0)$, $Q\ (1,1,1)$, $R\ (1,2,1)$ ثلاثة رؤوس من متوازي الأضلاع $PQRS$.

استخدم الأشعة في ايجاد:

١. إحداثيات الرأس الرابع S .

٢. إحداثيات منتصف PS.

٣. إحداثيات منتصف QR .

٨- إذا كان $a = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$, $b = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ احسب ما يلي :

١- $a.b$

2- $(a-b).(a+b)$

3- $(a-b).(a-b)$

4- $(a.a).a - (b.b).b$

٩- إذا كانت $P\ (2,0,3)$, $Q\ (1,4,-1)$ عين $\overrightarrow{PQ}$ ، ثم احسب الزاوية بين $\overrightarrow{PQ}$ والمحور oy.

١٠- استخدم الجداء الشعاعي في إيجاد شعاع الواحدة في اتجاه جداؤهما الخارجي (أي شعاع الواحدة العمود على كل من الشعاعين) والشعاعان هما:

$$a = (2,1,-1) \quad , \quad b = (1,1,1)$$

١١ - إذا كان $a = (3,-1,-4)$, $b = (-2,4,-3)$, $c = (1,2,-1)$ احسب:

١- $|3a - 2b + 4c|$

٢- $|a + b - 2c|$

٣- شعاع الواحدة الموازي للشعاع $3a - 2b + 4c$

١٢- أوجد الزاوية في المجال 0° إلى 180° بين الشعاعين:

$$\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k} \quad , \quad 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

١٣-أوجد قيمة λ بحيثُ يكون الشعاعان $(\lambda, 2, -1), (1,1,-3\lambda)$ متعامدين.

١٤-أوجد الأعداد α, β, γ التي تجعل الأشعة:

$$a = (\alpha, 2, -3) \quad , \quad b = (-1, 2\beta, 2) \quad , c = (2,1,-3\gamma)$$

متعامدة مثنى.

١٥-أثبت أنَّ مساحة متوازي الأضلاع تساوي طويلة الجداء الشعاعي لضلعين متجاورين من هذا المتوازي الأضلاع على اعتبار أنَّ هذين الضلعين يمثلان شعاعين.

١٦- أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه عند النقاط
$P\ (2,3,5)$, $Q\ (4,2,-1)$, $R\ (3,6,4)$.

١٧-ليكن لدينا:

$$A = (2,2,-1) \ , \ B = (0,1,1) \quad , \quad C = (-1,2,0)$$

أوجد زوايا المثلث ABC.

١٨ -إذا كانت $A = (1,1,-1), B = (-3,2,-2), C = (2,2,-4)$، أثبت أنَّ المثلث ABC قائم الزاوية في A.

١٩- برهن على أن الخط الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث وطوله يساوي نصف طول الضلع الثالث.

٢٠- احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه $P_3\ (-2,1,1)$, $P_2\ (4,5,1)$, $P_1\ (2,0,1)$.

٢١- احسب حجم متوازي السطوح الذي حروفه الأشعة

$$a = OP_1 = (1,2,6)\ ,\ \ b = OP_2 = (-1,2,3)\ \ ,\ \ c = OP_3 = (0,4,1)$$

٢٢- أوجد قيمة a التي تجعل المعادلات التالية ليس لها حل:

$$ax - y + 2z = 1$$
$$x + 2y - az = 2$$
$$4x + y - 2z = 2$$

٢٣- بيّن أنَّ المعادلات التالية غير متسقة:

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 10$$
$$x_1 - x_2 - x_3 = 1$$
$$4x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 5$$

٢٤- حل جملة المعادلات التالية باستخدام طريقة غاوص:

$$x_2 + 2x_3 - x_4 = 11$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2$$

٢٥- أوجد قيمة a كي يكون للجملة بطريقة غاوص:

$$x + 2y - 3z = 4$$
$$3x - y + 5z = 2$$
$$4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2$$

١- حل وحيد.

٢- مستحيلة الحل.

٣- عدد غير منته من الحلول.

٢٦- إذا كانت :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

١- أوجد $2A + B^T$, $2A + 3B$

٢- تحقق من أن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

٢٧- احسب المحددات التالية :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 & 0 \\ 0 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 0 & x^2 & x \\ x & 1 & 0 & x^2 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$