جامعة الجزيرة الخاصة
ALJAZEERA PRIVATE UNIVERSITY

Signal processing
معالجة الاشارة

د.م.عيد العبود

تحويل لابلاس

يستخدم تحويل لابلاس لنقل الإشارة من مجال الزمن الى مجال التردد لدراسة خصائص الإشارة وأهم استخدام له هو تحويل المعادلات التفاضلية الى معادلات جبرية لتسهيل حلها ثم نأخذ لابلاس العكس للناتج.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \quad ؛ p = \sigma + j\omega$$

مثال: لدينا التابع التالي:

$$f(t)=\begin{cases}1 & : 0<t<1\\ 2 & : 1<t<2\end{cases}$$

أوجد تحويل لابلاس للتابع السابق.

الحل:

$$F(p)=\int_0^1 1\cdot e^{-pt}\ dt+\int_1^2 1\cdot e^{-pt}\ dt$$

$$=\left[\frac{-1}{p}e^{-pt}\right]_0^1+\left[\frac{-2}{p}e^{-pt}\right]_1^2$$

$$=-\frac{1}{p}e^{-p}+\frac{1}{p}-\frac{2}{p}e^{-p}+\frac{2}{p}e^{-p}$$

خواص تحويل لابلاس:

١. الخطية:

$$f(t) \to F(p)$$

$$a\, f(t) \to a\, F(p)$$

$$a\, f(t) + b\, g(t) \to aF(p) + b\, G(p)$$

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \cdots + a_n f_n(t) \to a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p) + \cdots + a_n F_n(p)$$

٢. التحاكي:

$$L\,[f(at)] = \frac{1}{|a|}\, F({}^{p}/_{a})$$

نبدل كل p بـ ${}^{p}/_{a}$

٣.التأخير:

$$[f(t-\lambda)] = e^{-p\lambda}F(p)$$

بعض التحويلات الشهيرة لتحويل لابلاس:

1]- $f(t) = a \rightarrow F(P) = \frac{a}{p}$

2] $f(t) = e^{\pm at} \rightarrow F(P) = \frac{1}{p \mp a}$

3]- $L[f(t)e^{at}] = F(P)|_{p \rightarrow p-a}$

4]- $f(t) = \sin(at) \rightarrow F(P) = \frac{a}{p^2 + a^2}$

5]- $f(t) = \cos(at) \rightarrow F(P) = \frac{p}{p^2 + a^2}$

بعض التحويلات الشهيرة لتحويل لابلاس:

6]- $f(t) = \mathrm{sh}(at) \rightarrow F(P) = \frac{a}{p^2 - a^2}$

7]- $f(t) = \mathrm{ch}(at) \rightarrow F(P) = \frac{p}{p^2 - a^2}$

8]- $f(t) = t^n \rightarrow F(P) = \frac{n!}{p^{n+1}}$

9]- $f(t) = t^n \cdot e^{at} \rightarrow F(P) = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$

أمثلة:

1]- $f(t) = e^{2t} + 2 + \cos 2t + t^3$

$$F(p) = \frac{1}{p-2} + \frac{2}{p} + \frac{p}{p^2+4} + \frac{3!}{p^4}$$

2]- $f(t) = -3 + e^{2t}\cos 2t + t^3 + 4\sin t\cos t$

لدينا : $4\sin t\cos t = 2\sin 2t$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{-3}{p} + \frac{p}{p^2+4}\Big|_{p\to p-2} + \frac{3!}{p^4} + 2\cdot\frac{2}{p^2+4}$$

3]- $f(t) = \cos(wt \pm \varphi) = \cos wt\cos\varphi \mp \sin wt\sin\varphi$

$$F(p) = \frac{p}{p^2+w^2}\cos\varphi \mp \frac{w}{p^2+w^2}\sin\varphi$$

4]- $f(t) = \sin(wt \pm \varphi) = \sin wt \cos \varphi \pm \cos wt\ sin\varphi$

$$F(p) = \frac{w}{p^2 + w^2}\cos\varphi \pm \frac{p}{p^2 + w^2}\sin\varphi$$

5]- $f(t) = e^{-t}\cos 3t$

$$F(p) = \frac{p}{p^2+9}\Big|_{p\to p+1} = \frac{p+1}{(p+1)^2+9} = \frac{p+1}{p^2+2p+10}$$

6]- $f(t) = e^{2t}\cos^2 t$

$\cos^2 t = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t)$: لدينا

$$\Longrightarrow f(t) = e^{2t}\cos^2 t = e^{2t}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t)$$

$$F(p) = [\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}]\Big|_{p\to p-2} = \frac{1}{2(p-2)} + \frac{1}{2}\,\frac{p-2}{(p-2)^2+4}$$

$$= \frac{1}{2(p-2)} + \frac{p-2}{2(p-2)^2+8}$$

$$= \frac{1}{2(p-2)} + \frac{p-2}{2p^2-4p+16}$$

حالات خاصة :

$$1]\text{- } g(t) = \frac{f(t)}{t} \rightarrow G(P) = \int_{p}^{+\infty} F(P)\, dp$$

$$2]\text{- } g(t) = \int_{0}^{t} f(t)\, dt \rightarrow G(P) = \frac{F(P)}{p}$$

$$3]\text{- } g(t) = f(t) \cdot t^{n} \rightarrow G(P) = (-1)^{n} \frac{d^{n}}{dp^{n}} F(P)$$

1]- $f(t) = \sin 5t$

طريقة أولى مباشرة من تحويل لابلاس لتابع الـ sin: $F(P) = \frac{5}{p^2+25}$

طريقة ثانية حسب خاصية التحاكي : $L[f(at)] = \frac{1}{|a|} F(^{p}/_{a})$

$$F(P) = \frac{1}{|5|} L[\sin t]|_{p\to p/5} = \frac{1}{5}\frac{1}{(p/5)^2+1} = \frac{5}{p^2+25}$$

2]- $f(t) = \sin(t-3) = e^{-3p} L[\sin t] = \frac{e^{-3p}}{p^2+1}$

3]- $f(t) = \text{t} \cdot \sin 5t$

$$F(P) = (-1)^1 \frac{d^1}{dp^1} L[\sin t]$$

$$= (-1)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$$

4]- $f(t) = t^2 \cdot e^t$

الطريقة الأولى :

$$F(P) = \frac{2!}{p^{2+1}}\Big|_{p \to p-1} = \frac{2}{(p-1)^3}$$

الطريقة الثانية :

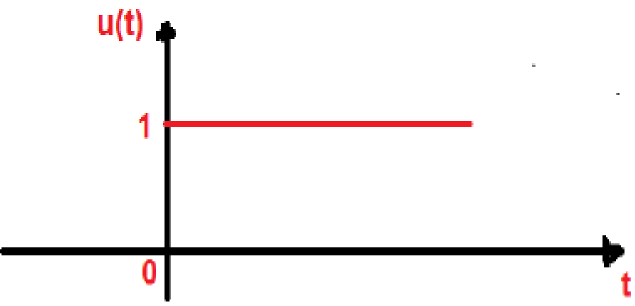
$$F(P) = (-1)^2 \frac{d^2}{dp^2}\, L[e^t]$$

$$= \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{p-1}\right) = \frac{d}{dp}\left(\frac{-1}{(p-1)^2}\right) = \frac{2(p-1)}{(p-1)^4} = \frac{2}{(p-1)^3}$$

5]- $f(t) = t^2 \cdot \cos 3t\ u(t)$

$$F(P) = L[t^2 \cdot \cos 3t] = (-1)^2 \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p}{p^2+9}\right)$$

تابع الخطوة الواحدية : unit step function :



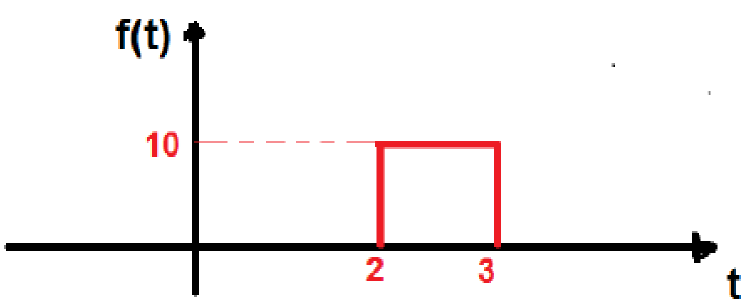
$$u(t) = \begin{cases} 1 & : \quad 0 \le t < +\infty \\ 0 & : \quad -\infty < t < 0 \end{cases}$$

تحويل لابلاس له يساوي :

$$L\big(u(t)\big) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-pt}dt = [-\frac{1}{p}e^{-pt}]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

مثال:

اكتب التابع للإشارة لمبينة بالشكل و أوجد تحويل لابلاس له.



<u>الحل:</u>

$$f(t) = 10\mathrm{u}(\mathrm{t}-2) - 10\mathrm{u}(\mathrm{t}-3)$$

$$L\big(f(t)\big) = 10\frac{1}{p}e^{-2p} - 10\frac{1}{p}e^{-3p}$$

$$= \frac{10}{p}[e^{-2p} - e^{-3p}]$$

: **unit impluse function** : تابع النبضة الواحدية

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & : \ t = 0 \\ 0 & : \ t \neq 0 \end{cases}$$

تحويل لابلاس له يساوي :

$$L(\delta(t)) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = e^{-pt}|_{t=0} = 1$$

مثال:

$$f(t) = \delta(t) + 2u(t) - 3e^{-2t}$$

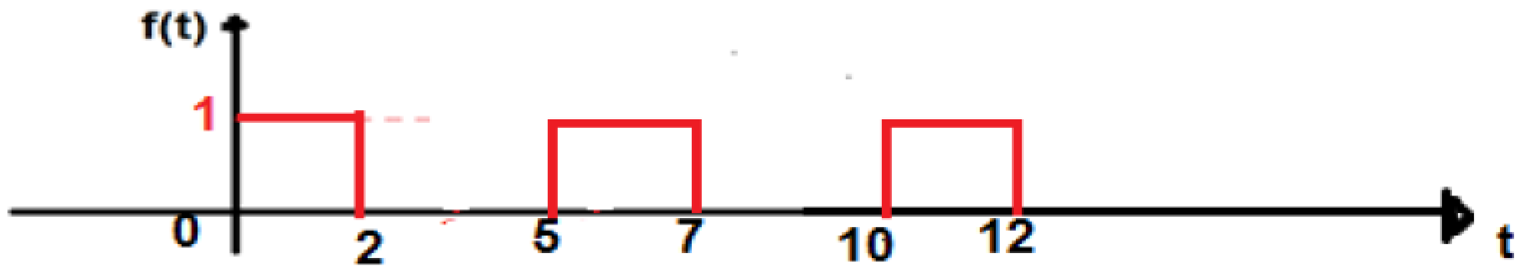
$$F(p) = 1 + \frac{2}{p} - 3\frac{1}{p+2}$$

الخاصية الدورية:

من أجل تابع دوري $f(t)$

$$L\left(f(t+nT)\right)=\frac{F_1(p)}{1-e^{-pT}}$$

حيث : $F_1(p)=L\left(f_1(t)\right)$ هي تحويل لابلاس لدور واحد



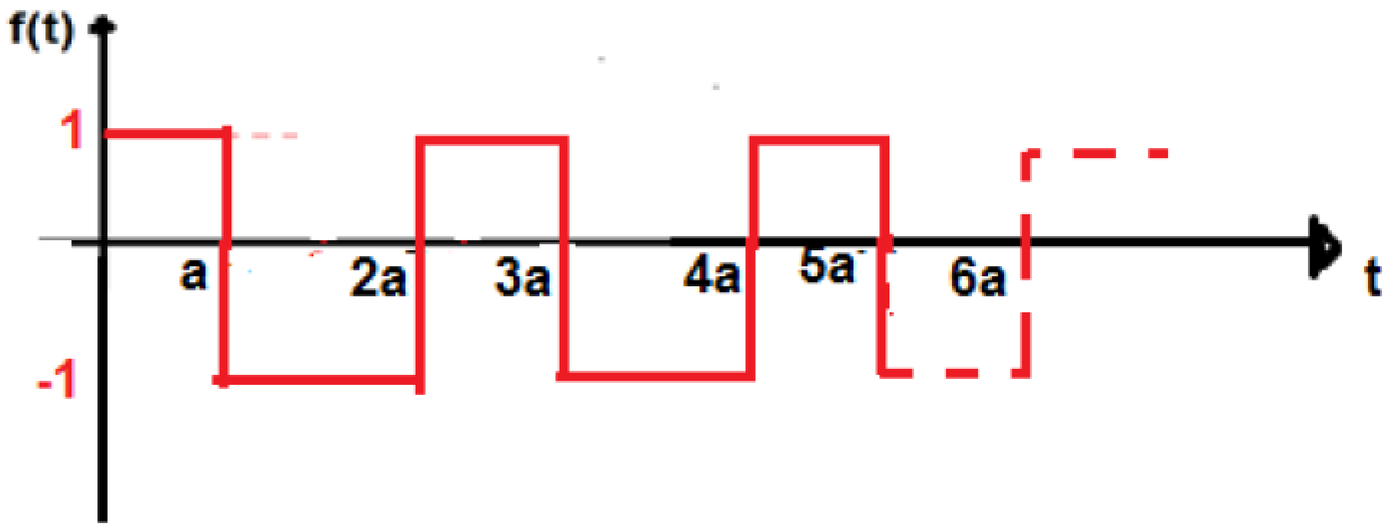
الحل : الدور $T=5$

$$f_1(t)=u(t)-u(t-2)$$

$$F_1(p)=L\left(f_1(t)\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-2p}=\frac{1}{p}(1-e^{-2p})$$

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{1-e^{-pT}}=\frac{1-e^{-2p}}{p(1-e^{-5p})}$$

مثال 2: أوجد تحويل لابلاس للتابع الدوري المعطى بالشكل التالي :



$$f_0(t) = \begin{cases} 1 & : \quad 0 < t < a \\ -1 & : \quad a < t < 2a \\ 0 & : \quad \text{غيرذلك} \end{cases}$$

$$f_0(t) = u(t) - u(t-a) - [u(t-a) - u(t-2a)] = u(t) - 2u(t-a) + u(t-2a)$$

$$F_0(p) = L\big(f_0(t)\big) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-ap} + \frac{1}{p}e^{-2ap} = \frac{1}{p}(1-e^{-ap})^2$$

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}} = \frac{(1-e^{-ap})^2}{p(1-e^{-2ap})} = \frac{(1-e^{-ap})^2}{p(1-e^{-ap})(1+e^{-ap})} = \frac{(1-e^{-ap})}{p(1+e^{-ap})}$$