جامعة الجزيرة الخاصة
ALJAZEERA PRIVATE UNIVERSITY

Signal processing
معالجة الاشارة

د.م.عيد العبود

ما هو تحويل فورييه؟ وماهي استخداماته؟

عملية تقسيم إشارة معقدة إلى موجات بسيطة، ومعرفة العدد اللازم من الموجات، هي تحويل فورييه.

تقوم الفلسفة الرئيسية وراء مبدأ تحويل فورييه Fourier Transform، على تقسيم كل إشارة يمكن تخيلها تقريباً إلى مجموعة موجات بسيطة. (فورييه عالم فرنسي، لذلك يقرأ اسمه فورييه وليس فورير).

يأخذ تحويل فورييه (FT) إشارة ويعبر عنها من خلال ترددات الموجات التي تشكل تلك الإشارة. وعند التفكير في تطبيقات تحويل فورييه فإن أول ما يخطر لنا هو الصوت.

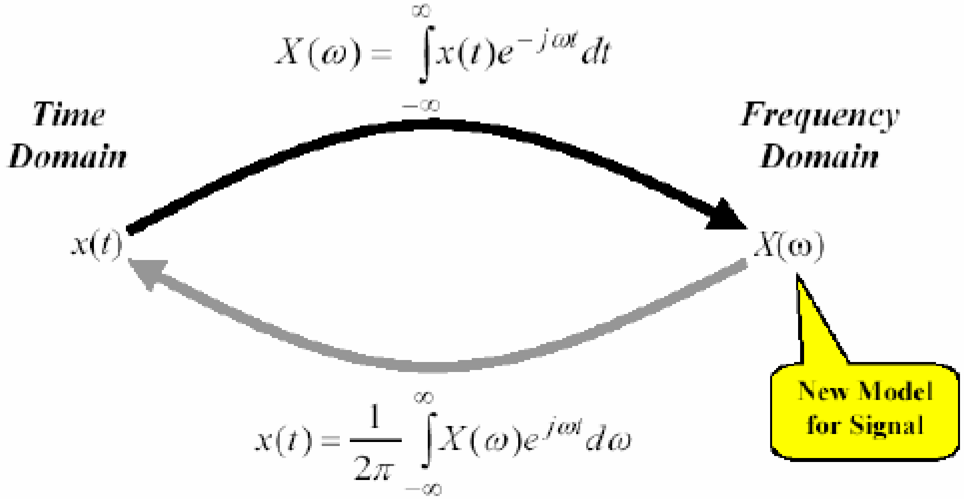
فعلى سبيل المثال، عندما يعزف شخص ما على مفتاح C الأوسط على البيانو، نحن لا نسمع بآذاننا عملية اهتزاز الوتر 261 مرة في الثانية (تردد C الأوسط)، بل نسمع فقط نغمة واحدة. وهنا تعتبر عملية اهتزازات الهواء بمثابة الإشارة Signal، أما النغمة فهي تحويل فورييه لتلك الإشارة.

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Called the "**Fourier Transform**" of $x(t)$

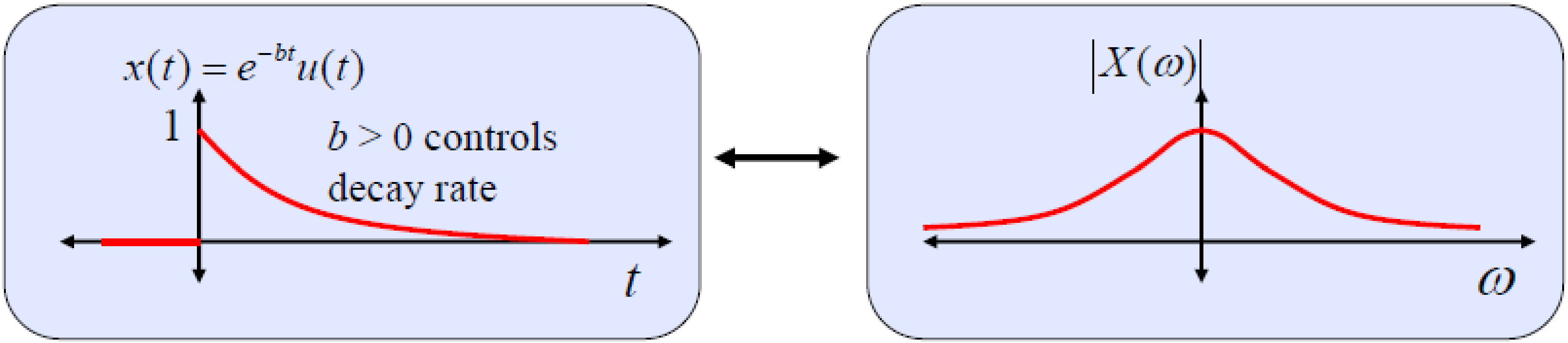
Fourier Transform Viewpoint

View FT as a transformation into a new "domain"

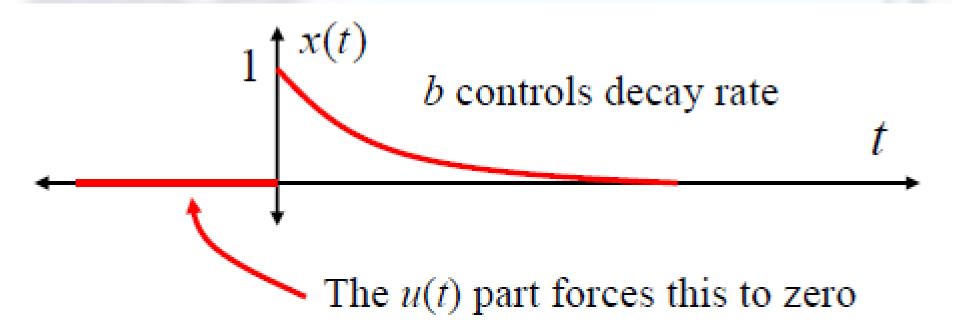


$x(t)$ is the "time domain" description of the signal

$X(\omega)$ is the "frequency domain" description of the signal



$x(t) = e^{-bt}u(t)$ find $X(\omega)$ if $b > 0$



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Now plug in for our signal:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-bt} u(t) e^{-j\omega t}}_{\text{integrand} = 0 \text{ for } t<0 \text{ due to the } u(t)} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-bt} e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(b+j\omega)t} dt$$

Set lower limit to 0 and then $u(t) = 1$ over integration range

Easy integral!

$$= \left[\frac{-1}{b+j\omega} e^{-(b+j\omega)t} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{-1}{b+j\omega} \left[e^{-(b+j\omega)\infty} - e^{-(b+j\omega)0} \right]$$

$$= \frac{-1}{b+j\omega} \left[\underbrace{e^{-b\infty}}_{=0} \underbrace{e^{-j\omega\infty}}_{mag=1} - \underbrace{e^{0}}_{=1} \right] = \frac{-1}{b+j\omega} [0-1]$$

$$= \frac{1}{b+j\omega}$$

Only if $b>0$… what happens if $b<0$

Summary of FT Result for Decaying Exponential

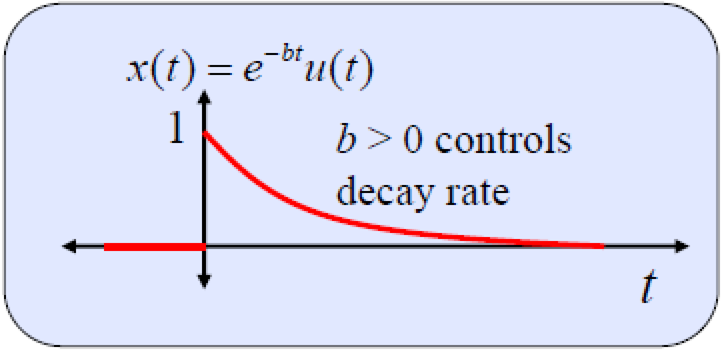
$$\boxed{x(t) = e^{-bt}u(t)} \longleftrightarrow \boxed{X(\omega) = \frac{1}{b + j\omega}}$$

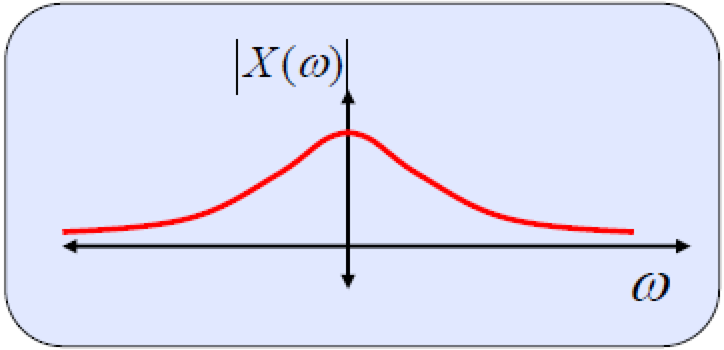
For $b > 0$

(Complex Valued)

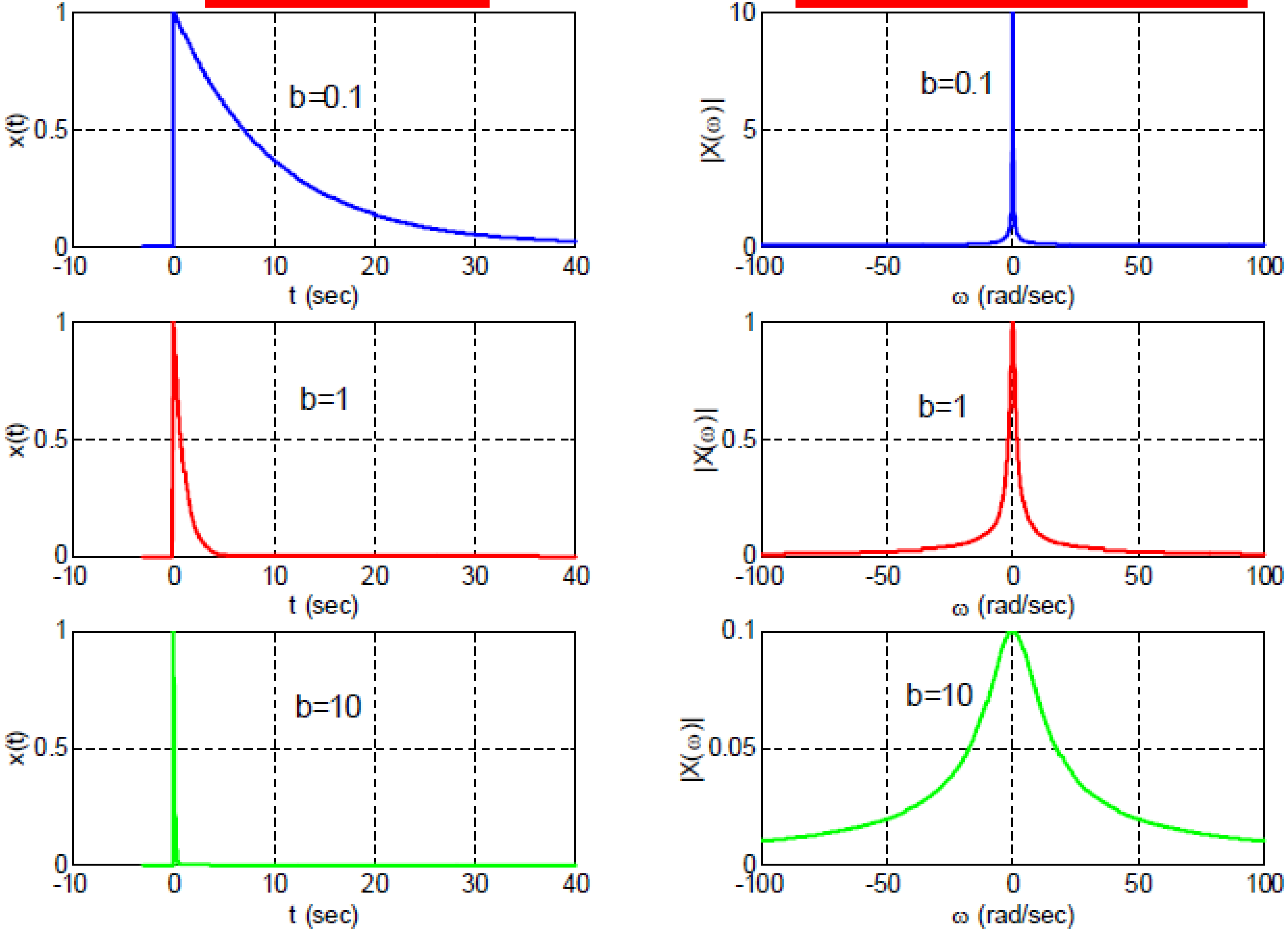
$$\boxed{|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{b^2 + \omega^2}}}$$ Magnitude

$$\boxed{\angle X(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{b}\right)}$$ Phase





Time Signal | Fourier Transform



Exploring Effect of decay rate b on the Fourier Transform's Shape

Short Signals have FTs that spread more into High Frequencies!!!

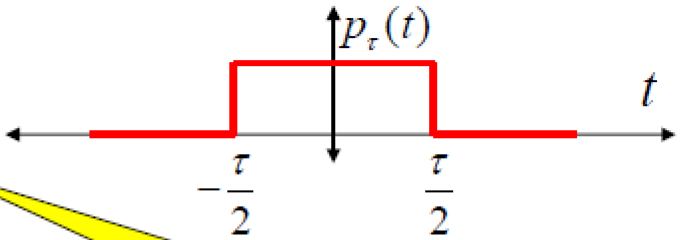
Note: As *b* increases…

1. **Decay rate in time signal increases**
2. **High frequencies in Fourier transform are more prominent.**

Example: FT of a Rectangular pulse

τ = pulse width

Given: a rectangular pulse signal $p_\tau(t)$



Recall: we use this symbol to indicate a rectangular pulse with width τ

Find: $P_\tau(\omega)$… the FT of $p_\tau(t)$

Note the Notational Convention: lower-case for time signal and corresponding upper-case for its FT

Solution:

Note that

$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{\tau}{2} \le t \le \frac{\tau}{2} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Now apply the definition of the FT:

$$P_\tau(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt$$

Limit integral to where $p_\tau(t)$ is non-zero… and use the fact that it is 1 over that region

$$= \frac{-1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{\omega}\underbrace{\left[\frac{e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}}{j2}\right]}_{= \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$$

Artificially inserted 2 in numerator and denominator

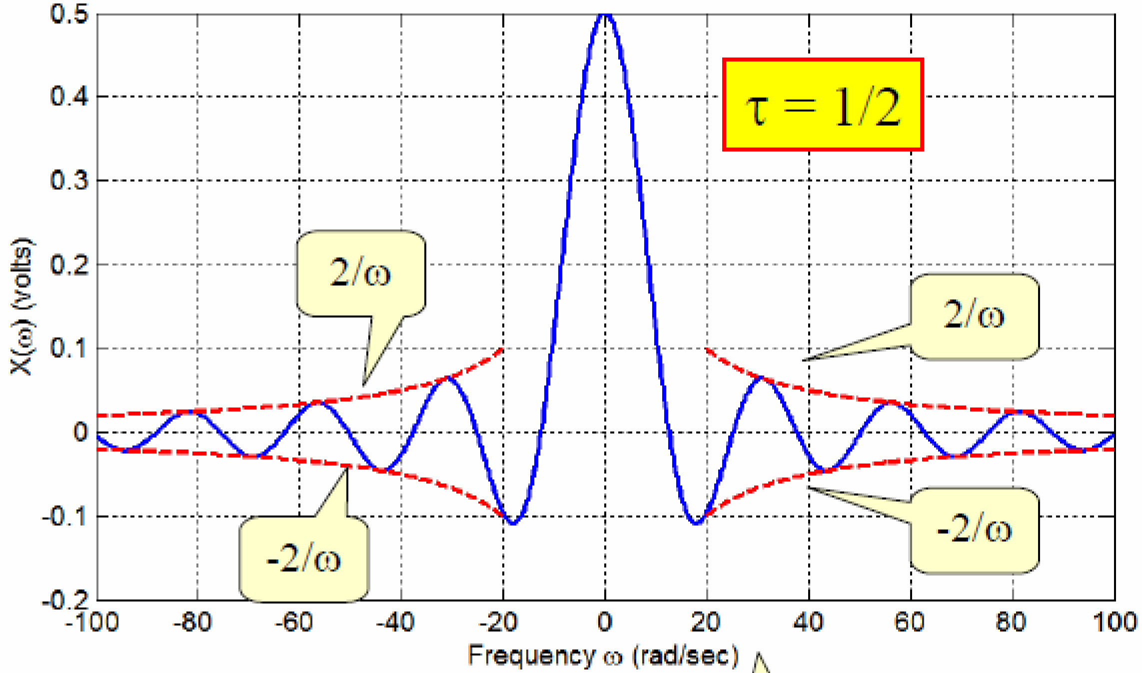
Use Euler's Formula

$$\boxed{P_\tau(\omega) = \frac{2\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega}}$$

sin goes up and down between -1 and 1

1/ω decays down as |ω| gets big… this causes the overall function to decay down

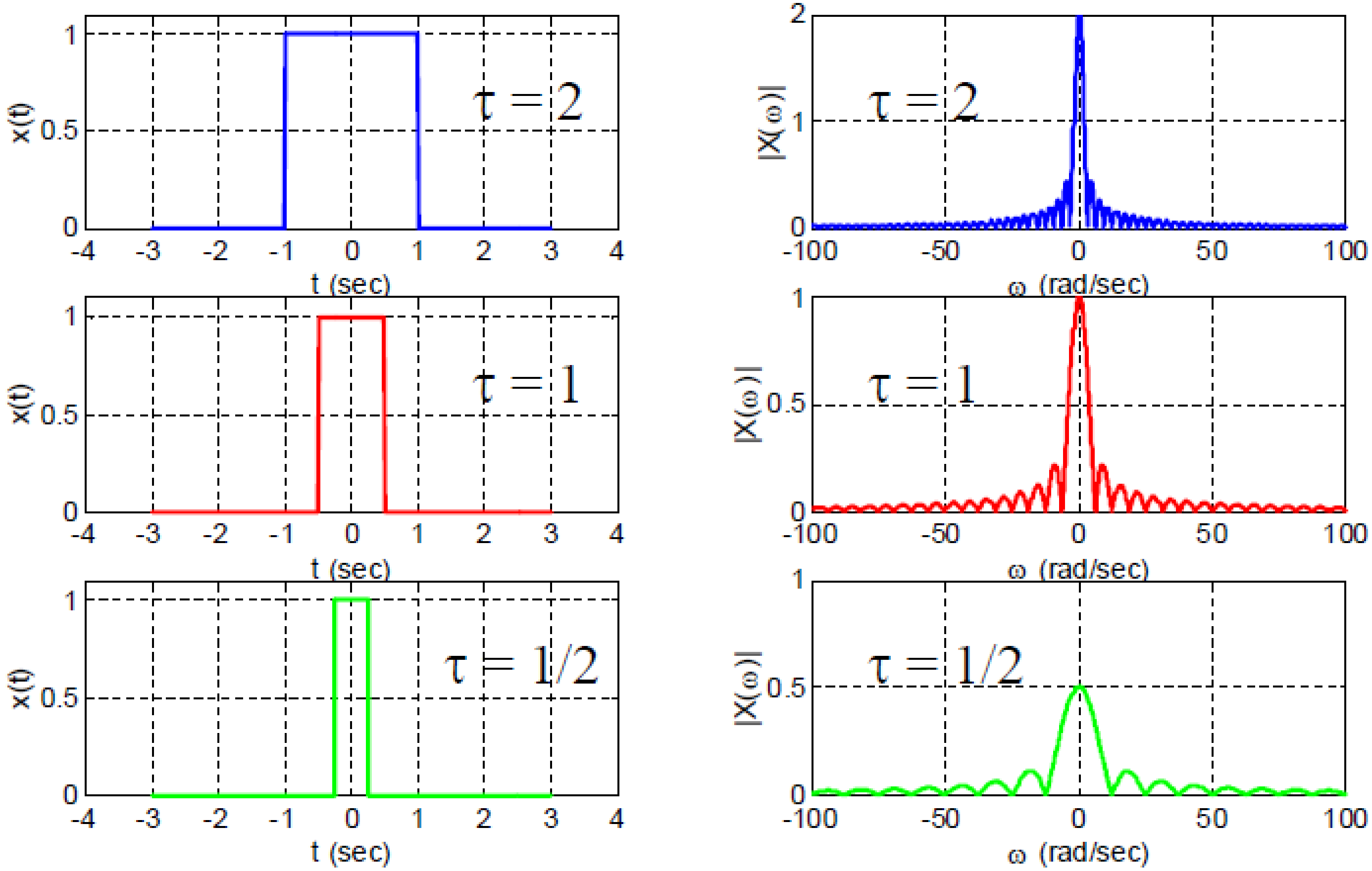
For ***this*** case the FT is real valued so we can plot it using a single plot (shown in solid blue here):



$$P_\tau(\omega) = \frac{2\sin\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega}$$

The sine wiggles up & down "between ±2/ω"

Effect of Pulse Width on the FT $P_\tau(\omega)$



Note: As width decreases, FT is more widely spread

➔ Narrow pulses "take up more frequency range"