الاهتزازات الميكانيكية والأمواج

الاهتزازات الحرة: هي الحركة الاهتزازية التي تُنجز على حساب مخزون طاقة الاهتزاز للمنظومة المهتزة بدون تأثير قوى خارجية. وعند وجود مقاومة تكون الحركة الاهتزازية **متخامدة**. وتُسمى عملية الاهتزاز تحت تأثير قوة خارجية متغيرة مع الزمن اهتزازات **مُحرضة**.

1.6. الحركة الاهتزازية التوافقية

إن أبسط شكل للحركة الاهتزازية هو **الاهتزازات التوافقية** (الجيبية)، حيث تتغير إزاحة المقدار المهتز مع الزمن وفق قانون الجيب أو جيب التمام (التجيب):

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (6.1)$$

حيث:

$x -$ الإزاحة اللحظية للجسم عن مركز التوازن، $A -$ سعة الاهتزاز، أي الإزاحة الأعظمية،

$(\omega t + \varphi_0) -$ الطور اللحظي للاهتزاز، $\omega -$ التواتر الدائري للاهتزاز،

$t -$ الزمن، $\varphi_0 -$ الطور الابتدائي للاهتزاز،

يرتبط دور الاهتزاز T وتواتره الخطي υ وتواتره الدائري ω بالعلاقات الآتية:

$$\upsilon = \frac{1}{T}\ ,\ \omega = 2\pi\upsilon = \frac{2\pi}{T} \qquad (6.2)$$

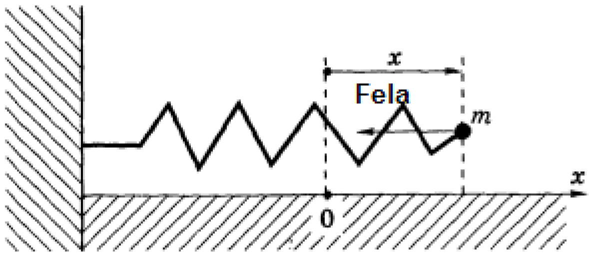
تظهر الاهتزازات التوافقية تحت تأثير قوى المرونة أو ما يُشابهها (قوة شبه مرنة).

مثال:

لتكن لدينا نقطة مادية كتلتها m مُثبتة في نابض ثابت صلابته k، موضو عان على سطح أملس أفقي (الشكل 1.6). إذا قمنا بشد النابض لمسافة x، تؤثر من جهة النابض في هذه النقطة قوة مرونة F_{ela} (قوة إرجاع) تتناسب مع الإزاحة x وفق قانون هوك:

$$F_{ela} = -k\,x$$

وتدل الإشارة السالبة على أن الإزاحة وقوة المرونة متعاكستان بالاتجاه.



الشكل 1.6. اهتزاز نقطة مادية معلقة بنابض

لتحديد تبعية الازاحة للزمن $x = f(t)$ نكتب قانون نيوتن الثاني على شكل معادلة تفاضلية (لأن تسارع الجسم $a = d^2x/dt^2$)، فالحركة في هذه الحالة تتعين فقط بوجود قوة المرونة:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x \qquad (6.3)$$

نقسم طرفي المعادلة (6.3) على m، ونرمز لنسبة المقدارين الموجبين k و m من خلال $\omega_0^2 = k/m$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2\,x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\,x = 0 \qquad (6.4)$$

نبرهن أن حل هذه المعادلة التفاضلية هو اهتزازة توافقية:

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (6.5)$$

ولأجل ذلك نفاضل المعادلة (6.5) مرتين:

$$v = x' = A_0\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (6.6)$$

$$a = x'' = -A_0\,\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (6.7)$$

ونعوض النتيجة في المعادلة (6.4):

$$-A_0\,\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{k}{m} A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = 0$$

أو:

$$A_0\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = 0$$

هذه المساواة يجب أن تتحقق في أي لحظة زمنية، وهذا ممكن فقط من أجل الشرط:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad (6.8)$$

والنتيجة، إذا كانت القوة المحصلة المؤثرة في الجسم هي قوة مرونة، فإن الجسم ينجز اهتزاز توافقي من الشكل (6.5) ويتعين التواتر الدائري للاهتزاز $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ فقط بكتلة الجسم وبخواص المرونة (الصلابة) للمنظومة ولذلك يُسمى **بتواتر الاهتزاز الخاص بالجسم.**

إن الإزاحة والسرعة في الاهتزاز التوافقي يختلفان في الطور بمقدار $\pi/2$، وسعة السرعة تساوي $\upsilon_{\max} = A_0\,\omega_0$. وسرعة الجسم أعظمية عند المرور في وضع التوازن (الإزاحة تساوي الصفر)، وعند الإزاحة العظمى (المساوية للسعة) تساوي السرعة الصفر.

وينتج من المعادلتين (6.5) و (6.7) أن إزاحة الجسم وتسارعه يتغيران بطورين متعاكسين وسعة التسارع تساوي $a_{\max} = \upsilon_{\max}\omega_0 = A_0\,\omega_0^2$.

الطاقة الكلية في الاهتزاز التوافقي E هي مجموع الطاقة الحركية E_k والكامنة E_p:

$$E = E_k + E_p = \frac{m v^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2} \qquad (6.9)$$

وبالتعويض في هذه العلاقة بصيغة السرعة والإزاحة وبمراعاة أن $k = \omega_0^2 m$ نحصل على:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m A_0^2 \omega_0^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \\ &= \frac{1}{2} m A_0^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2} k\, A_0^2 \end{aligned} \qquad (6.9a)$$

والنتيجة، الطاقة الكلية للاهتزاز التوافقي لا تتعلق بالزمن وتتناسب طرداً مع كتلة الجسم، ومربع السعة ومربع تواتر الاهتزاز. وتتغير الطاقة الحركية والكامنة باستمرار مع الزمن، ولكن يبقى مجموعهما ثابت دائماً.

2.6. الاهتزازات المتخامدة

تعمل قوى المقاومة على إعاقة الاهتزاز في المنظومات الحقيقية المهتزة ، حيث أنها تمنع تطور عملية الاهتزاز. ولإيجاد طابع الحركة الاهتزازية في هذه الحالة، نعتبر أنه بالإضافة إلى قوة

المرونة أو شبه المرنة F_{ela} تؤثر في المنظومة قوة احتكاك تتناسب مع السرعة وتتوجه باتجاه معاكس لقوة المرونة: $F_{fri}=-r(dx/dt)$.

ومنه بموجب قانون نيوتن الثاني فالمعادلة التفاضلية التي تصف هذه الحالة هي:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\,x-r\frac{dx}{dt} \qquad (6.10)$$

نقسم طرفي المعادلة على m ونأخذ الرمز $r/m=2\beta$ ونحافظ على الرمز $k/m=\omega_0^2$:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0 \qquad (6.11)$$

ولهذه المعادلة حلاً من الشكل:

$$x=A_0\,e^{-\beta t}\sin(\omega_0\,t+\varphi_0) \qquad (6.12)$$

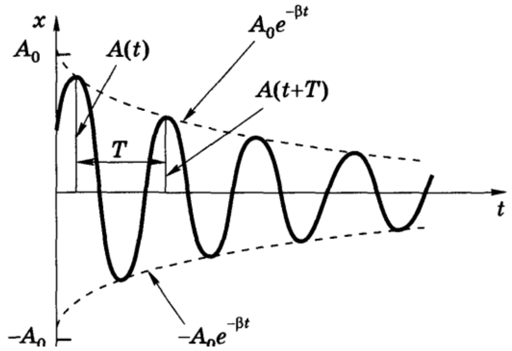
وتدل (6.12) أن إزاحة الجسم مع الزمن تحدث وفق قانون توافقي بتواتر ω، ولكن تتناقص سعة الاهتزاز مع الزمن: $A=A_0\,e^{-\beta t}$.

ويُسمى المعامل $\beta=r/2m(s^{-1})$ بمعامل **التخامد** وكلما كان هذا المعامل أكبر كلما كان تخامد الاهتزاز أسرع. وبالمقارنة مع الحالات السابقة يتناقص أيضاً التواتر الدائري للاهتزاز الخاص ω:

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2} \qquad (6.13)$$

تحدث عملية الاهتزاز فقط من أجل الشرط $0<(\omega_0^2-\beta^2)$، أي عندما $\omega_0>\beta$. وإذا كان التخامد في المنظومة كبيراً جداً $(\omega_0<\beta)$ فإن القيمة تحت الجذر في العلاقة (6.13) تصبح سالبة، وفي هذه الحالة الاهتزاز غير ممكن وطابع الحركة لا دوري.

يوضح الشكل 2.6 اهتزاز متخامد، حيث تدل الخطوط المستمرة على تبعية الإزاحة للزمن، بينما تدل الخطوط المتقطعة على القانون الأسي لتناقص السعة.



الشكل 2.6. تبعية الإزاحة x للزمن t في حالة الاهتزاز المتخامد

يوصف الاهتزاز المتخامد من خلال تناقص التخامد δ الذي يُعبر عن نسبة سعتين متتاليتين يفصل بينهما دور اهتزاز T (انظر الشكل 2.6).

$$\delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} \qquad (6.14)$$

ويُسمى اللوغاريتم الطبيعي لهذه العلاقة التناقص اللوغاريتمي للتخامد λ، ويرتبط بالدور وبمعامل التخامد بالعلاقة:

$$\lambda = \ln\delta = \ln\frac{A_0\, e^{-\beta t}}{A_0\, e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T \text{ أو } \lambda = \beta T \qquad (6.15)$$

3.6. الاهتزازات القسرية

في هذه الحالة تؤثر في منظومة الاهتزاز قوة خارجية ما بالإضافة إلى قوة المرونة وقوة الاحتكاك، حيث تعيق القوة الخارجية تخامد الاهتزاز.

نفترض أن القوة القسرية F_{com} تؤثر دورياً بتواتر دائري Ω مرتبط بالزمن وفق العلاقة:

$$F_{com} = F_0 \sin\Omega t$$

حيث F_0 – سعة القوة القسرية.

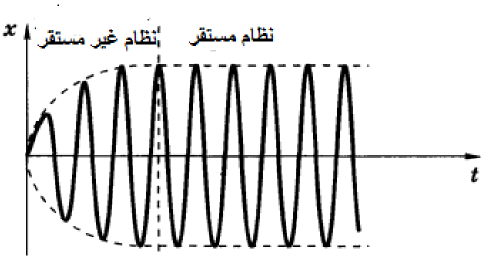
وفي هذه الحالة تملك المعادلة التفاضلية للاهتزاز وفق قانون نيوتن الثاني الشكل الآتي:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - r\frac{dx}{dt} + F_0\sin\Omega t = 0 \qquad (6.16)$$

وبالحفاظ على الرمزين $k/m=\omega_0^2$ و $r/m=2\beta$ وبأخذ الرمز $F_0/m=f_0$ تتحول المعادلة (6.16) إلى الشكل:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=F_0\sin\Omega t \qquad (6.17)$$

وحل هذه المعادلة هو دالة ما كالموضحة بالمنحني على الشكل 3.6. ويتكون هذا الحل من جزأين، أحدهما يوافق نظام الاهتزاز غير المستقر، حيث تتعلق سعته مع الزمن، والجزء الثاني يصف نظام الاهتزاز المستقر.



الشكل 3.6. تبعية الإزاحة x للزمن t في حالة الاهتزاز القسري

تتبع الازاحة x في النظام المستقر للاهتزاز القسري لقانون جيبي (توافقي) وتحدث بتواتر يساوي تواتر تأثير القوة القسرية:

$$x=A\sin(\Omega t+\varphi) \qquad (6.18)$$

وتعتمد السعة المستقرة A للاهتزاز على بارامترات المنظومة (تواتر الاهتزاز الخاص ω_0 ومعامل التخامد β) وعلى طابع القوة القسرية (f_0 و Ω): $A=f(\omega_0,\beta,f_0,\Omega)$.

وبدراسة مضبوطة نحصل على العلاقة الآتية لقيمة A و φ الداخلين في العلاقة (6.17):

$$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}} \qquad (6.19)$$

$$tg\varphi=\frac{-2\beta\Omega}{\Omega^2-\omega_0^2} \qquad (6.20)$$

ومن المعادلة (6.19) ينتج أن السعة تبلغ قيمة عظمى A_{max} عندما يأخذ المقام قيمة دنيا ويحدث هذا من أجل الشرط:

$$\Omega = \Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \qquad (6.21)$$

وهكذا، إذا تعين تواتر القوة القسرية وفق العلاقة (6.21)، فإن سعة الاهتزاز القسرية ستكون أعظمية.

وظاهرة الازدياد الحاد لسعة الاهتزاز القسري الذي يحدث من أجل تواتر ما للقوة القسرية يُسمى **بالتواتر التجاوبي**، الذي يُعين بالعلاقة (6.21).

4.6. جمع الاهتزازات التوافقية

تعتمد نتيجة جمع الاهتزازات التوافقية على اتجاه الإزاحة للاهتزازات الجاري جمعها، وعلى النسبة بين التواترات، والأطوار والسعات.

جمع اهتزازين لهما نفس التواتر، وتحدثان على طول خط مستقيم واحد. في هذه الحالة يختلف الاهتزازان المجموعان فقط بالسعة A_1 و A_2 وبالطور الابتدائي φ_1 و φ_2:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

ونتيجة جمع هذين الاهتزازين هو اهتزاز توافقي يحدث بنفس التواتر:

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \\ &= A \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \qquad (6.23)$$

إن سعة الاهتزاز المُحصل A لا تعتمد فقط على سعة الاهتزازين الأولين A_1 و A_2 بل أيضاً على فرق الطور الأولي بينهما[1] φ_1 و φ_2:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (6.24)$$

ويُعين الطور الابتدائي φ للاهتزاز المُحصل من العلاقة الآتية:

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \qquad (6.25)$$

وهكذا، يحدث الاهتزاز المحصل وفق قانون توافقي (جيبي) بنفس تواتر الاهتزازين الأولين، ولكن سعة الاهتزاز المحصل تعتمد بوضوح على فرق الطور الابتدائي للاهتزازين الأولين.

تساوي السعة أعظمية $A = A_1 + A_2$ فيما إذا توافق الاهتزازان الأولين بالطور أو إذا اختلفا بمقدار $2k\pi$، أي من أجل $\Delta\varphi = 2k\pi$ حيث $k = 0 \pm 1, \pm 2, ...$.

السعة دنيا وتساوي $A = |A_1 - A_2|$ في حالة تعاكس الاهتزازين الأولين بالطور، أي $\Delta\varphi = \pi(2k+1)$ حيث $k = 0 \pm 1, \pm 2, ...$. وعندما $A_1 = A_2$ يطفئ الاهتزازان بعضهما بعض و $A = 0$.

من أجل القيم الأخرى لفرق الطور $\Delta\varphi$ تتعين سعة الاهتزاز المحصل من العلاقة (6.24).

جمع اهتزازين مختلفين بالتواتر، ويحدثان على طول خط مستقيم واحد. في هذه الحالة الاهتزازان المجموعان توافقيان ويحدثان بتواترين مختلفين:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}\right\} \qquad (6.26)$$

ويوضح الشكل (6.4,a) و (6.4,b) الاهتزازين الأولين ونتيجة جمعهما على الترتيب.

عند جمع اهتزازين جيبيين بتواترين مختلفتين ω_1 و ω_2 (دوريهما T_1 و T_2) فإن الاهتزاز المحصل لن يكون جيبياً، وسيمثل حركة دورية أكثر تعقيدًا.

مثال:

يخضع جسم بآن واحد، إلى حركتين جيبيتين لهما التواتر الزاوي نفسه، والمنحى نفسه، ومعادلتاهما:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 10\sin(2t + \pi/4) \\ x_2 &= 6\sin(2t + 2\pi/3) \end{aligned}\right\}$$

بفرض أن x_1 و x_2 مقاستان بـ cm. أوجد الحركة المحصلة لهاتين الحركتين.

الحل:

إن فرق الطور يساوي:

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - 3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$$

وعليه فإن السعة المحصلة تساوي إلى:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1\,A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$
$$=\sqrt{(10)^2+(6)^2+2(10\times 6)\cos(5\pi/12)}\;=12{,}92\,cm$$

ويعطى الطور الابتدائي بالعلاقة:

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

$$\tan\varphi=\frac{10\sin(\pi/4)+6\sin(2\pi/3)}{10\cos(\pi/4)+6\cos(2\pi/3)}=6{,}527$$

أي أنّ $\varphi=81{,}3^\circ=1{,}42\,rad$.

وهكذا تكون معادلة الحركة المحصلة للجسم من الشكل التالي:

$$x(cm)=x_1+x_2=12{,}92\sin(2t+1{,}42)$$