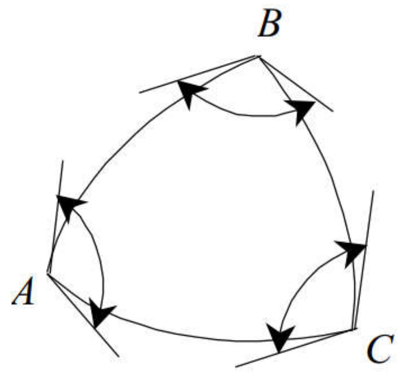
التثليث الجيوديزي
Geodetic Triangulation

المثلث الكروي وتأثير إنحناء الأرض

نقيس باستخدام جهاز التيودوليت الزوايا الأفقية في المستوي الأفقي، لكنه عندما تصبح منطقة التثليث الجيوديزي كبيرة، فإن إنحناء الأرض يجب أن يؤخذ في الحسبان وهذا يعني أن خطوط الرصد ليست مستقيمة وبالتالي فالمثلث المتشكل من رصد مسافات كبيرة لا يقع في المستوي وإنما هو عبارة عن شكل فراغي ندعوه **بالمثلث الكروي** أو **المثلث الجيوديزي** (الشكل 6.8**)**. إضافة إلى ذلك فإن مجموع زوايا المثلث الكروي لا يساوي $180°$ بل يساوي قيمة أكبر من ذلك، أي أن هنالك زيادة في المجموع ندعوها **بالزيادة الكروية ε**.



شكل 6.8

قيمة هذه الزيادة تعتمد على مساحة المثلث وتعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon = \frac{A_0}{R^2 \sin 1''} \quad \text{seconds}$$

حيث أن: A_0 هي مساحة المثلث بالكيلومترات المربعة

R هو نصف قطر الأرض الوسطي (يساوي حوالي $6373\ km$)

يُسبب **إنحناء سطح الأرض** الكروي تغيراً في السمت في كل نقاط الإستقامة بين نقطتين مثلثاتيتين. مثلاً لو كانت النقطتان X و Y واقعتان في مستوي أفقي وكان السمت من X إلى Y يساوي φ فإن السمت المعاكس من Y إلى X سيكون $180^\circ + \varphi$. في الحالة الكروية هذا غير صحيح كما هو واضح من الشكل (6.9).

بفرض أن الخط الجيوديزي XY المرسوم على سطح الكرة، بحيث يبدأ من خط العرض φ_1 وينتهي عند خط العرض φ_2 . النقطة N تُمثل القطب الشمالي و S القطب الجنوبي وأن SXN و SYN هما خطي

الطول (خط الزوال meridian) المارين من X و Y على الترتيب. عند خط الإستواء خطوط الزوال متوازية لكنها تتقارب كلما اقتربنا من أحد القطبين. بفرض أن خطي الطول الزوال أعلاه يصنعان زاوية θ وهي كما هو معلوم الفرق بين خطي الطول اليميني Y واليساري X. السموت عند النقطتين X و Y هي α و $\alpha + \alpha\delta$ على الترتيب. نظراً لأن $\alpha\delta$ تُمثل التقارب في خطوط الزوال .... نكتب:

$$XN = 90° - \phi_1$$
$$YN = 90° - \phi_2$$

$$\tan\frac{X+Y}{2} = \frac{\cos\frac{x-y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}}\cot\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\frac{\alpha + \left(180° - \alpha - \delta\alpha\right)}{2} = \frac{\cos\frac{(90° - \phi_2) - (90° - \phi_1)}{2}}{\cos\frac{(90° - \phi_2) + (90° - \phi_1)}{2}}\cot\frac{\theta}{2}$$

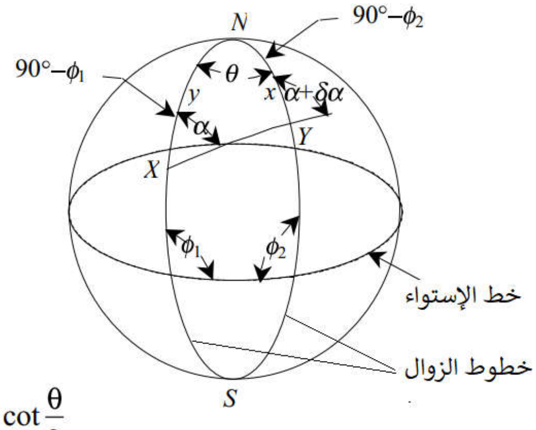


Fig. 6.9

$$\tan\left(90° - \frac{\delta\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}}{\sin\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}}\cot\frac{\theta}{2} \quad \Longrightarrow \quad \tan\frac{\delta\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}}{\cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}}\tan\frac{\theta}{2}$$

في السماحة الجيوديزية تكون المسافات أقل من $100\ km$ وهذا يعادل تقريباً $1°$ تغيراً في خطوط الطول أو خطوط العرض، ولهذا نحن نتعامل مع زوايا صغيرة وعليه نكتب:

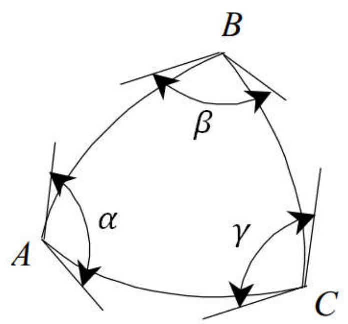
$$\delta\alpha = \theta \sin\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} = \theta \sin\bar{\phi}$$

حيث أن $\bar{\varphi}$ تُمثل خط العرض الوسطي بين النقطتين X و Y.

أمثلة ومسائل على التثليث الجيوديزي

مثال (1):

أجريت عمليات تثليث جيوديزي في منطقة مساحتها حوالي $1000\ km^2$ حيث تم قياس زوايا مثلث ABC وكذلك طول الضلع AB فكانت النتائج كما يلي:



$$\angle A = 62°24'18.4''$$
$$\angle B = 64°56'09.9''$$
$$\angle C = 52°39'34.4''.$$
$$AB = 34606.394\ \text{m.}$$

نصف قطر الأرض = $6383.393\ \text{km.}$

المطلوب حساب الزيادة الكروية في المثلث و تقدير الزوايا الثلاث المصححة.

الحل:

لحساب الزيادة الكروية، من الضروري تقدير مساحة المثلث ABC . في الحقيقة حساب مساحة المثلث الكروي بصورة دقيقة مسألة صعبة، لكننا هنا لا نحتاج إلى قيمة دقيقة بل إلى مساحة تقريبية للمثلث ولذلك سنعتبره كمثلث مستوي مجموع زواياه $180°$. ولتحقيق هذا الشرط سوف نطرح من كل زاوية مقدار ثلث الزيادة الكروية أي $\frac{(\alpha+\beta+\gamma-180)}{3}$ أي

$$\varepsilon = \frac{(\alpha+\beta+\gamma-180)}{3}$$
$$= \frac{1}{3} \times (62°24'18.4'' + 64°56'09.9'' + 52°39'34.4'' - 180°) = 0.9''.$$

وعليه تصبح زوايا المثلث المستوي التقريبي:

$$A = 62°24'18.4'' - 0.9'' = 62°24'17.5''$$
$$B = 64°56'09.9'' - 0.9'' = 64°56'09.0''$$
$$C = 52°39'34.4'' - 0.9'' = 52°39'33.5''$$
$$\text{Sum} = 180°00'00''.$$

نستطيع الآن تطبيق علاقة الجيوب في المثلث المستوي لحساب الضلع BC:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \qquad BC = \frac{AB \sin A}{\sin C}$$

$$BC = \frac{34606.394 \times \sin 62^\circ 24' 17.5''}{\sin 52^\circ 39' 33.5''} = 38576.121 \text{ m.}$$

ونحسب مساحة المثلث كما يلي:

$$A_0 = \frac{1}{2} AB\, BC \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times 34606.394 \times 38576.121 \times \sin 64^\circ 56' 09'' = 604.64 \text{ km}^2.$$

لنطبق الآن قانون الزيادة الكروية ونحسب ε:

$$\varepsilon = \frac{A_0}{R^2 \sin 1''}$$

$$= \frac{604.64}{6383.393^2} \times 206265 = 3.06''.$$

بناءاً على هذه الزيادة، يكون المجموع النظري لزوايا المثلث الكروي يساوي

$$= 180^\circ + \varepsilon$$
$$= 180^\circ + 3.06''$$
$$= 180^\circ 00' 3.06''.$$

لكن مجموع الزوايا الثلاث بناءاً على الزوايا المقاسة يساوي إلى:

$$= 180^\circ + 3 \times 0.9''$$
$$= 180^\circ 00' 02.7''.$$

إذن مقدار الخطأ المثلثي في الزوايا:

$$= 180^\circ 00' 02.7'' - 180^\circ 00' 3.06'' = -0.36''.$$

وباعتبار الزوايا قيست بنفس الدقة أو الموثوقية، لهذا سنوزع الخطأ بالتساوي على الزوايا الثلاث

$$A = 62^\circ 24' 18.4'' + 0.12'' = 62^\circ 24' 18.52''$$
$$B = 64^\circ 56' 09.9'' + 0.12'' = 64^\circ 56' 10.02''$$
$$C = 52^\circ 39' 34.4'' + 0.12'' = 52^\circ 39' 34.52''$$
$$\text{Sum} = 180^\circ 00' 00''.$$