قسم المسائل والأمثلة
طريقة المربعات الصغرى في المساحة

مثال (1): قيست مسافة 6 مرات وكانت النتائج كما يلي:

$$74.31 \text{ m}, \ 74.28 \text{ m}, \ 74.32 \text{ m}, \ 74.33 \text{ m}, \ 74.30 \text{ m}, \ 74.31 \text{ m}.$$

المطلوب تحديد القيمة المتوقعة (أو ذات الأرجحية العظمى) للمسافة وفق التربيعات الصغرى.

الحل:

إذا اعتبرنا أن القيمة المتوقعة (المحتملة) للمسافة هي $\hat{l}$. وكانت القيم الستة المرصودة لهذه المسافة هي $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ وقيم الرواسب (الأخطاء) هي $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ حيث:

$$\upsilon_1 = \hat{l} - l_1; \qquad \upsilon_2 = \hat{l} - l_2; \qquad \upsilon_3 = \hat{l} - l_3$$

$$\upsilon_4 = \hat{l} - l_4; \qquad \upsilon_5 = \hat{l} - l_5; \qquad \upsilon_6 = \hat{l} - l_6.$$

ولدينا مبدأ التربيعات الصغرى كما يلي:

$$\phi = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2 + \upsilon_4^2 + \upsilon_5^2 + \upsilon_6^2 = \text{a minimum}$$

$$= (\hat{l} - l_1)^2 + (\hat{l} - l_2)^2 + (\hat{l} - l_3)^2 + (\hat{l} - l_4)^2 + (\hat{l} - l_5)^2 + (\hat{l} - l_6)^2 = \text{a minimum.}$$

كي تحقق الصيغة الأخيرة المبدأ، نشتق المعادلة ونجعل قيمتها معدومة:

$$\frac{d\phi}{d\hat{l}} = 2(\hat{l} - l_1) + 2(\hat{l} - l_2) + 2(\hat{l} - l_3) + 2(\hat{l} - l_4) + 2(\hat{l} - l_5) + 2(\hat{l} - l_6) = 0$$

$$6\hat{l} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6$$

$$\hat{l} = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6}{6}$$

$$= \frac{74.31 + 74.28 + 74.32 + 74.33 + 74.30 + 74.31}{6}$$

$$= \mathbf{74.31 \ m}.$$

مثال (2): قيست زاوية ستة مرات من قبل ستة أشخاص (باستخدام نفس الجهاز) وكانت النتائج:

$$42°25'10'' \ (2),\ 42°25'08''\ (1),\ 42°25'09''\ (3),\ 42°25'07''\ (2),\ 42°25'11''\ (3),\ 42°25'09''\ (2).$$

القيم المعطاة بين قوسين تُمثل الأوزان (ω) لهذه القياسات. حدد القيمة المقدرة (الأكثر إحتمالاً) لقياس الزاوية بطريقة المربعات الصغرى.

الحل:

لندع الأرصاد $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ وأوزانها $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ والرواسب (أو الأخطاء) $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ ولتكن $\hat{\alpha}$ هي القيمة المقدرة المطلوبة للزاوية. كما سبق نكتب أولاً

$$\upsilon_1 = \hat{\alpha} - \alpha_1; \qquad \upsilon_2 = \hat{\alpha} - \alpha_2; \qquad \upsilon_3 = \hat{\alpha} - \alpha_3$$
$$\upsilon_4 = \hat{\alpha} - \alpha_4; \qquad \upsilon_5 = \hat{\alpha} - \alpha_5; \qquad \upsilon_6 = \hat{\alpha} - \alpha_6.$$

ومن ثم نضع مبدأ التربيعات الصغرى كما يلي:

$$\phi = \omega_1\upsilon_1^2 + \omega_2\upsilon_2^2 + \omega_3\upsilon_3^2 + \omega_4\upsilon_4^2 + \omega_5\upsilon_5^2 + \omega_6\upsilon_6^2 = \text{a minimum}$$

لدينا $\omega_i \mathrm{v}_\mathrm{i}^2 = \omega_\mathrm{i}(\hat{\alpha} - \alpha_i)^2, \mathrm{i} = 1,2, \dots 6$. ونعلم كي يتحقق من أجل ϕ النهاية الصغرى يجب أن يكون المشتق معدوم:

$$\frac{d\phi}{d\hat{\alpha}} = \begin{bmatrix} 2\omega_1(\hat{\alpha}-\alpha_1) + 2\omega_2(\hat{\alpha}-\alpha_2) + 2\omega_3(\hat{\alpha}-\alpha_3) + 2\omega_4(\hat{\alpha}-\alpha_4) \\ +2\omega_5(\hat{\alpha}-\alpha_5) + 2\omega_6(\hat{\alpha}-\alpha_6) \end{bmatrix} = 0$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \omega_3\alpha_3 + \omega_4\alpha_4 + \omega_5\alpha_5 + \omega_6\alpha_6}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6)}$$

وهذه كما نعلم هي صيغة المتوسطة الموزونة. إذن

$$\hat{\alpha} = 42°25' + \frac{2\times10'' + 1\times8'' + 3\times9'' + 2\times7'' + 3\times11'' + 2\times9''}{(2+1+3+2+3+2)} = \mathbf{42°25'9.2''}.$$

مثال (3): قيست زوايا مثلث مستوي بنفس الدقة وحصلنا على القياسات الثلاث للزوايا كما يلي:

$$\theta_1 = 52°33'; \qquad \theta_2 = 64°45'; \qquad \theta_3 = 62°39'.$$

المطلوب تحديد القيم المقدرة للزوايا الثلاث بعد التعديل بموجب المربعات الصغرى.

الحل:

لتكن قيم الزوايا الأكثر إحتمالاً (المعدلة) هي : $\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$

وقيم الرواسب (الأخطاء) هي: v_1, v_2, v_3 ونكتب

$$\hat{\theta}_1 = \theta_1 + \upsilon_1$$
$$\hat{\theta}_2 = \theta_2 + \upsilon_2$$
$$\hat{\theta}_3 = \theta_3 + \upsilon_3.$$

وكما هو معلوم في المثلث المستوي مجوع الزوايا $180°$ إذن

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3 &= 180° \\
(\theta_1 + \upsilon_1) + (\theta_2 + \upsilon_2) + (\theta_3 + \upsilon_3) &= 180° \\
\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 &= 180° - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
&= 180° - (52°33' + 64°45' + 62°39') \\
&= 180° - 179°57' = +3'
\end{aligned}$$

ومنه

$$\upsilon_3 = 3' - (\upsilon_1 + \upsilon_2).$$

الآن نضع مبدأ التربيعات الصغرى :

$$\phi = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2 = \text{a minimum}$$

$$\phi = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + (3' - \upsilon_1 - \upsilon_2)^2 = \text{a minimum}.$$

نقوم بالإشتقاق كما في السابق:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \upsilon_1} = 2\upsilon_1 - 2(3' - \upsilon_1 - \upsilon_2) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \upsilon_2} = 2\upsilon_2 - 2(3' - \upsilon_1 - \upsilon_2) = 0$$

$$2\upsilon_1 + \upsilon_2 = 3'$$

$$\upsilon_1 + 2\upsilon_2 = 3'.$$

بحل هاتين المعادلتين الخطيتين (التي تدعى جملة المعادلات النظامية) بمجهولين هما v_1, v_2 نحصل

$$\upsilon_1 = 1'$$
$$\upsilon_2 = 1'$$
$$\upsilon_3 = 3' - 1' - 1' = 1'.$$

وبالتالي تكون القيم المقدرة للزوايا الثلاث بعد التعديل بموجب المربعات الصغرى :

$$\hat{\theta}_1 = 52°33' + 1' = \mathbf{52°34'}$$
$$\hat{\theta}_2 = 64°45' + 1' = \mathbf{64°46'}$$
$$\hat{\theta}_3 = 62°39' + 1' = \mathbf{62°40'}$$
$$\text{Total} = 180° \qquad (\textit{Check}).$$

مسألة (4): قيست كافة الزوايا في الشبكة المثلثاتية الموضحة في الشكل 5.3 أدناه وكانت النتائج كما يلي:

$$\theta_1 = 44°42'00''; \quad \theta_3 = 43°48'00''; \quad \theta_5 = 42°06'00''$$
$$\theta_2 = 46°00'00''; \quad \theta_4 = 44°31'12''; \quad \theta_6 = 48°52'48''$$

المطلوب حساب القياسات النهائية للزوايا المعدلية بموجب التربيعات الصغرى.

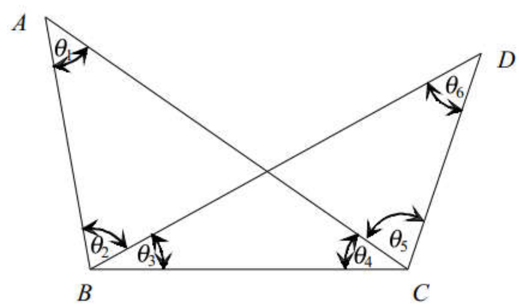

Fig. 5.3

الحل: بانظر لشكل الشبكة نجد أن لدينا نموذج رياضي يمكن تعريفة بصورة فريدة من خلال أربعة زوايا فقط أي أن العدد الأصغري لتعريف النموذج $n_0 = 4$ ولدينا ستة زوايا مقاسة وهو عدد الأرصاد $n = 6$ إذن الفائض $r = n - n_0 = 2$ ، وهذا يعني أننا نستطيع شرطين مستقلين فقط:

$$\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4 = 180°$$
$$\hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4 + \hat{\theta}_5 + \hat{\theta}_6 = 180°.$$

بإدخال راسب على كل زاوية مقاسة نحصل على الزاوية المعدلة أو بطريقة أخرى الراسب (أو الخطأ) يساوي إلى الزاوية المعدل مطروحاً منها المقاسة ومن نستطيع إعادة كتابة الشرطين الأخيرين بالشكل:

$$\begin{aligned}
\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + \upsilon_4 &= 180° - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)\\
&= 180° - 179°01'12''\\
&= 58'48''\\
&= 0.98°\\
\upsilon_3 + \upsilon_4 + \upsilon_5 + \upsilon_6 &= 180° - (\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6)\\
&= 180° - 179°18'00''\\
&= 42'00''\\
&= 0.70°.
\end{aligned}$$

نستنتج مباشرة من العلاقات السابقة أن عدد مجاهيل المسألة المستقلين 4 لأننا نستطيع في كل معادلة أن نحسب أحد الرواسب بدلالة 3 رواسب متبقية.

لتكن هذه المجاهيل الأربعة المستقلة v_2, v_3, v_4, v_5 ولنكتب العلاقات التي تربط الرواسب الأخرى v_1, v_6 بها كما يلي

$$\begin{aligned}
\upsilon_1 &= 0.98° - (\upsilon_2 + \upsilon_3 + \upsilon_4)\\
\upsilon_6 &= 0.70° - (\upsilon_3 + \upsilon_4 + \upsilon_5).
\end{aligned}$$

الآن نضع شرط التربيعات الصغرى للرواسب

$$\phi = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2 + \upsilon_4^2 + \upsilon_5^2 + \upsilon_6^2 = \text{a minimum} .$$

ولنحذف منه الرواسب الغير مستقلة v_1, v_6

$$\begin{aligned}
\phi &= (0.98 - \upsilon_2 - \upsilon_3 - \upsilon_3 - \upsilon_4)^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2 + \upsilon_4^2 + \upsilon_5^2 + (0.70 - \upsilon_3 - \upsilon_4 - \upsilon_5)^2\\
&= \text{a minimum.}
\end{aligned}$$

النهاية الصغرى للتابع ϕ الأخير تتحقق عندما تكون جميع مشتقاته نسبة للمتحولات معدومة، إذن نضع:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\upsilon_2} = 2(0.98 - \upsilon_2 - \upsilon_3 - \upsilon_4)\times(-1) + 2\upsilon_2 = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\upsilon_3} = 2(0.98 - \upsilon_2 - \upsilon_3 - \upsilon_4)\times(-1) + 2\upsilon_3 + 2(0.70 - \upsilon_3 - \upsilon_4 - \upsilon_5)\times(-1) = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\upsilon_4} = 2(0.98 - \upsilon_2 - \upsilon_3 - \upsilon_4)\times(-1) + 2\upsilon_4 + 2(0.70 - \upsilon_3 - \upsilon_4 - \upsilon_5)\times(-1) = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\upsilon_5} = 2\upsilon_5 + 2(0.70 - \upsilon_3 - \upsilon_4 - \upsilon_5)\times(-1) = 0.$$

بعد إجراء الترتيبات اللازمة نكتب العلاقات الأخيرة بصورة أبسط كما يلي

$$\begin{aligned} 2v_2 + v_3 + v_4 &= 0.98 \\ v_2 + 3v_3 + 2v_4 + v_5 &= 1.68 \\ v_2 + 2v_3 + 3v_4 + v_5 &= 1.68 \\ v_3 + v_4 + 2v_5 &= 0.70 \end{aligned}$$

لحل جملة المعادلات الخطية، نقوم بطرح المعادلة الثالثة من الثانية ونستنتج : $v_3 = v_4$ فتصبح لدينا ثلاث معادلات خطية فقط كما يلي:

$$2v_2 + 2v_3 + 0. = 0.98$$
$$v_2 + 5v_3 + v_5 = 1.68$$
$$0. + 2v_3 + 2v_5 = 0.70$$

نضرب الثانية بالعدد 2 ونطرحها من الأولى ينتج لدينا جملة معادلتين بمجهولين:

$$8v_3 + 2v_5 = 2.38$$
$$2v_3 + 2v_5 = 0.70$$

بطرح المعادلة الثانية من الأولى نستنتج بأن: $6v_3 = 2.38 - 0.7$ ، أي أن $v_3 = v_4 = 0.28$

وبعدها سنجد أن : $v_5 = \frac{0.70}{2} - v_3 = 0.07$ و $v_2 = \frac{0.98}{2} - v_3 = 0.21$ وأخيراً

$v_6 = 0.70 - v_3 - v_4 - v_5 = 0.07$ و $v_1 = 0.98 - v_2 - v_3 - v_4 = 0.21$

جميع هذه الرواسب الآن محسوبة أعلاه بالدرجات $degreeas$ ويجب تحويلها إلى نظام الزوايا الستيني أي أن (*degree-minute-second*) dms

$$\begin{aligned} v_1 &= 12'36'' & v_4 &= 16'48'' \\ v_2 &= 12'36'' & v_5 &= 4'12'' \\ v_3 &= 16'48'' & v_6 &= 4'12''. \end{aligned}$$

وعليه تصبح الزوايا المعدلة للمثلث اليساري للشبكة :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= 44°42'00'' + 12'36'' = 44°54'36'' \\ \hat{\theta}_2 &= 46°00'00'' + 12'36'' = 46°12'36'' \\ \hat{\theta}_3 &= 43°48'00'' + 16'48'' = 44°04'48'' \\ \hat{\theta}_4 &= 44°31'12'' + 16'48'' = 44°48'00'' \end{aligned}$$

$(Check).$

المجموع $= 180°$

كما تصبح الزوايا المعدلة للمثلث اليميني :

$$\hat{\theta}_3 = 43°04'48''$$

$$\hat{\theta}_4 = 44°48'00''$$

$$\hat{\theta}_5 = 42°06'00'' + 04'12'' = 42°10'12''$$

$$\hat{\theta}_6 = 48°52'48'' + 04'12'' = 48°57'00''$$

(*Check*).

المجموع Total $= 180°$

مسألة (5): تم إجراء قياسات لفرق الإرتفاع بين أربعة نقاط من شبكة تسوية موضحة في الشكل 5.5 ، وكانت نتائج القياسات كما في القائمة التالية:

فرق الإرتفاع بالمتر	إلى النقطة	من النقطة
$h_1 = 6.226$	P	Q
$h_2 = 5.133$	Q	S
$h_3 = 11.368$	P	S
$h_4 = 23.521$	R	Q
$h_5 = 28.639$	R	S
$h_6 = 17.275$	R	P

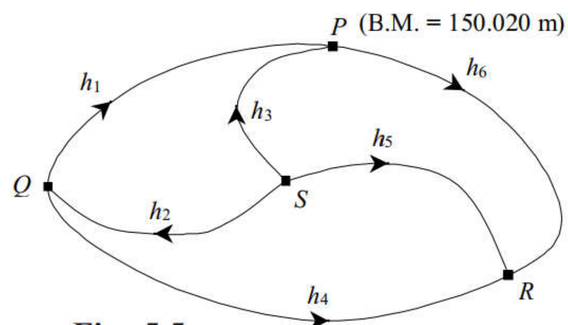

Fig. 5.5

المطلوب تحديد القيم الأكثر إحتمالاً لإرتفاعات النقاط Q, R, S بموجب مبدأ المربعات الصغرى وبفرض أن كافة القياسات متساوية الدقة ومستقلة وأن النقطة P هي مرجع تسوية ذو ارتفاع معطى $150.020\ m$

الحل:

لتكن القيم $\hat{h}_1, \hat{h}_2, \dots, \hat{h}_6$ تُمثل قيم إرتفاعات النقاط المعدلة بموجب مبدأ المربعات الصغرى

ولتكن $v_1, v_2, \dots, v_6$ هي الرواسب الستة (قيم التصحيحات). الآن سنستخدم طريقة الأرصاد غير المباشرة ونضع بموجبها الشروط الستة:

$$h_1 + v_1 = \hat{h}_1 = 150.020 - Q$$

$$h_2 + v_2 = \hat{h}_2 = Q - S$$

$$h_3 + v_3 = \hat{h}_3 = 150.020 - S$$

$$h_4 + v_4 = \hat{h}_4 = R - Q$$

$$h_5 + v_5 = \hat{h}_5 = R - S$$

$$h_6 + v_6 = \hat{h}_6 = R - 150.020$$

بالتعويض بقيم $h_1, h_2, \dots, h_6$ في المعادلات الأخيرة نحصل على

$$\begin{aligned}
\upsilon_1 &= 143.794 - Q \\
\upsilon_2 &= Q - S - 5.133 \\
\upsilon_3 &= 138.652 - S \\
\upsilon_4 &= R - Q - 23.521 \\
\upsilon_5 &= R - S + 28.639 \\
\upsilon_6 &= R - 167.295
\end{aligned}$$

نضع شرط المربعات الصغرى للرواسب

$$\phi = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2 + \upsilon_4^2 + \upsilon_5^2 + \upsilon_6^2 = \text{a minimum}$$

$$\begin{aligned}
&= (143.794 - Q)^2 + (Q - S - 5.133)^2 + (138.652 - S)^2 \\
&\quad + (R - Q - 23.521)^2 + (R - S + 28.639)^2 + (R - 167.295)^2 \\
&= \text{a minimum.}
\end{aligned}$$

والنهايات الصغرى للتابع φ تحقق

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial Q} &= -2(143.794 - Q) + 2(Q - S - 5.133) - 2(R - Q - 23.521) = 0 \\
\frac{\partial\phi}{\partial R} &= 2(R - Q - 23.521) + 2(R - S + 28.639) + 2(R - 167.295) = 0 \\
\frac{\partial\phi}{\partial S} &= -2(Q - S - 5.133) - 2(138.652 - S) - 2(R - S + 28.639) = 0
\end{aligned}$$

بترتيب المعادلات الأخيرة ينتج

$$\begin{aligned}
3Q - R - S &= 125.406 \\
-Q + 3R - S &= 219.455 \\
-Q - R + 3S &= 104.880
\end{aligned}$$

وبحل المعادلات الخطية الأخيرة نحصل على مناسيب النقاط المجهولة

$$\begin{aligned}
Q &= \mathbf{143.786\ m} \\
R &= \mathbf{167.298\ m} \\
S &= \mathbf{138.654\ m}.
\end{aligned}$$

ملاحظة: يمكننا حل المسالة الأخيرة بطريقة المصفوفات ، حيث نبدأ بكتابة المعادلات في أعلى الصفحة باستخدام أمثال المجاهيل Q, R, S في المعادلات وتشكيل الجدول كما يلي

أمثال المجاهيل			الثوابت
Q	R	S	
– 1	0	0	143.794
+ 1	0	– 1	– 5.133
0	0	– 1	138.652
– 1	+ 1	0	– 23.521
0	+ 1	– 1	– 28.639
0	+ 1	0	– 167.295

مسألة (6): المطلوب تعديل الشبكة المثلثاتية بموجب المربعات الصغرى والمكونة من رباعي $ABCD$ كما في الشكل 5.8 ، حيث أجرينا قياسات للزوايا الثمانية الموضحة على الشكل وكانت النتائج كما يلي

$$\theta_1 = 43°48'22''; \quad \theta_5 = 49°20'43'';$$
$$\theta_2 = 38°36'57''; \quad \theta_6 = 33°04'56'';$$
$$\theta_3 = 33°52'55''; \quad \theta_7 = 50°10'43'';$$
$$\theta_4 = 63°41'24''; \quad \theta_8 = 47°23'28'';$$

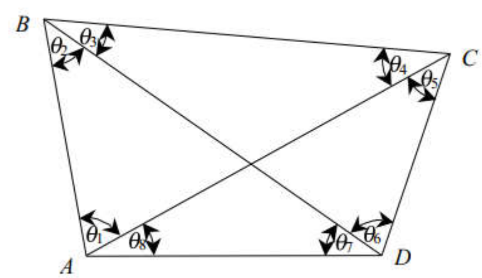

Fig. 5.8

نكتب أولاً المعادلات الشرطية للمسألة

$$(i)\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7 + \theta_8 = 360°$$
$$\Sigma\theta = 360°$$
$$(ii)\ \theta_1 + \theta_2 = \theta_5 + \theta_6$$
$$(iii)\ \theta_3 + \theta_4 = \theta_7 + \theta_8$$
$$(iv)\ \log\sin\theta_1 + \log\sin\theta_3 + \log\sin\theta_5 + \log\sin\theta_7$$
$$= \log\sin\theta_2 + \log\sin\theta_4 + \log\sin\theta_6 + \log\sin\theta_8$$
$$\Sigma \log\sin(\text{odd angle}) = \Sigma \log\sin(\text{even angle}).$$

- في الوقت الحاضر يُترك للطالب الطريقة التي يراها مناسبة للحل، مع العلم سوف نحل هذه المسالة بأكثر من طريقة في محاضرات لاحقة.